

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2022.262

弹性半平面矩形夹杂基本单元解及其应用

谢东东^{1a}, 金晓清^{1a,1b}, 蒋志桢^{1b}, 钱厚鹏^{1b}, 李 璞^{1b,2}

(1.重庆大学 a.航空航天学院;b. 机械传动国家重点实验室,重庆 400044;
2.哈尔滨工业大学 理学院,深圳 518055)

摘要:工程材料中存在的夹杂通常会对基体材料的弹性场产生扰动,当夹杂位于表界面附近时,夹杂与表界面的相互作用往往导致问题的解析求解变得复杂、困难。推导了二维半平面基体中矩形夹杂所致位移和应力场的基本单元解,用于通过“离散-叠加”来求解半无限平面含任意形状夹杂的弹性场。与之相比,传统的有限元法需要在远大于夹杂尺寸的半无限大基体域上进行网格划分,并且需要在夹杂/基体界面处细化网格以满足计算精度要求。提出了半解析算法,基于矩形夹杂单元封闭解,只需对夹杂区域进行离散,可有效提高计算效率。以半平面基体中含正六边形和圆形夹杂为例,该方法与有限元软件得到的结果进行对比,验证了基于单元解的半解析数值算法的正确性与有效性。

关键词:数值方法;夹杂;基本单元解;半平面问题

中图分类号:O343.1

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2022)12-026-10

Elementary solution of the elastic half-plane containing a rectangular inclusion: theory and applications

XIE Dongdong^{1a}, JIN Xiaoping^{1a,1b}, JIANG Zhizhen^{1b}, QIAN Houpeng^{1b}, LI Pu^{1b,2}

(1a. College of Aerospace Engineering; 1b. State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. School of Science, Harbin Institute of Technology, Shenzhen 518055, P. R. China)

Abstract: Inclusions in engineering materials create a disturbance to the elastic fields. When an inclusion is located in the vicinity of the surface, the interactions between the inclusion and the surface are often difficult to be solved analytically. The elementary solutions of the displacements and stresses caused by a rectangular inclusion contained in an elastic half-plane are derived in closed-form. Accordingly, the resultant elastic fields produced by any arbitrarily shaped inclusion can be solved through a “discretization-superposition” scheme. The traditional Finite Element Method needs to mesh the semi-infinite matrix

收稿日期:2022-02-23 **网络出版日期:**2022-05-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51875059);重庆市科技计划项目(cstc2020jcyj-msxmX0850);重庆市研究生科研创新项目(CYS21011)。

Supported by National Natural Foundation of China (51875059), Chongqing City Science and Technology Program (cstc2020jcyj-msxmX0850), and Graduate Research and Innovation Foundation of Chongqing (CYS21011).

作者简介:谢东东(1995—),男,硕士研究生,主要从事微观力学研究,(E-mail)1101112469@qq.com。

通信作者:金晓清,男,研究员,博士生导师,主要从事摩擦学、疲劳断裂、微观力学等研究,(E-mail)jinxq@cqu.edu.cn。

region which is much larger than the size of the inclusion, while the mesh needs to be sufficiently refined at the inclusion/matrix interface to attain a satisfactory accuracy. By taking advantages of the elementary solutions of rectangular inclusion, the proposed semi-analytical method merely performs the numerical discretization within the inclusion region, leading to remarkable savings on the meshing efforts and memory storage. Benchmark examples are reported for an elastic half-plane containing either regular hexagonal or circular inclusion, and the results are validated with those obtained by the commercial finite element software, demonstrating the correctness and effectiveness of this proposed semi-analytical method.

Keywords: numerical methods; inclusions; elementary solution; half-plane problem.

工程材料的综合性能与航空航天、新能源汽车、集成电路、机械工程、建筑工程等高新技术和民生产业的发展密切相关,材料中存在的杂质或者夹杂往往会改变其宏微观力学性能,从而影响工程结构和零部件的可靠性及使用寿命。Mura^[1]将诸如热膨胀、相变、塑性应变和初始应变等非弹性形变统称为本征应变,基体材料中包含的具有本征应变的子区域则称为夹杂。夹杂问题的研究可广泛应用于多个物理力学领域。如热失效是半导体研发中重点关注的问题,芯片在封装测试过程中由于材料热膨胀系数的不匹配会导致芯片出现翘曲^[2]、分层失效^[3]等现象而影响集成电路的性能。合金在熔炼过程中通常会析出夹杂物^[4],而夹杂物的存在有时也可以提高材料的力学性能,例如在面心立方结构 FeCoNiCr 高熵合金中加入 Ti 和 Al,产生的纳米级共格析出相能够显著增强合金强度^[5]。

工程材料中夹杂的形状通常是不规则的,其弹性场的解析解往往不易求解,对于一些特定形状的夹杂,国内外力学工作者已经进行了大量深入的研究。夹杂问题的突破性工作是始于 Eshelby^[6]对全空间椭球形夹杂的弹性场的研究,发现在均匀本征应变作用下椭球内部的弹性场是均匀分布的,还开创性地提出了等效夹杂方法。Chiu^[7]利用伽辽金矢量法给出了全空间长方体夹杂的位移梯度的三重傅里叶积分表达式,进一步可以根据几何方程和胡克定律求出应变场和应力场,随后又基于镜像法研究了半空间长方体夹杂的应力场和表面位移场^[8],半空间夹杂问题相对来说更具有工程实际意义,而由于涉及到自由表面的影响,求解过程更加复杂。

对于平面问题,Chiu^[9]利用傅里叶变换法,得到了全平面矩形夹杂在平面应力情况下应力场的表达式。Hu^[10]将三维半空间退化到平面应变的情况,推导了半平面矩形热夹杂外场的应力场。Ru^[11]利用保角变换和解析延拓的方法得到了全平面和半平面任意形状夹杂的解析解。Jin 等^[12]基于矩形夹杂解^[9]推导了平面夹杂问题的应力格林函数,利用格林函数将应力内外场统一表示成面积积分的形式,由于量子线与基体的晶格错配可以用平面应变条件下的静水夹杂模型等效,还指出了其方法在量子线结构中的应用,对于均匀分布的本征应变夹杂问题,可以利用格林定理将应力场转化成围道积分。Jin 等^[13-14]基于全空间椭球夹杂的结果,通过三维退化的方法,推导了全平面椭圆形夹杂的应力场、应变场和位移场。Li 等^[15]利用格林函数法推导了平面任意多边形夹杂的位移解,并可将其应用于线性分布本征应变的夹杂问题,与经典的 Eshelby 椭球夹杂^[6]不同,多边形夹杂的内外场位移解可以表示成统一的形式。

笔者利用半空间长方体夹杂解,通过对其一个维度无限延展的极限算法,给出了半无限平面含矩形夹杂的全场位移、应力解,并引入相应的记号方法,将影响系数和响应原函数之间的关系表达成更加直观简洁的形式。针对半平面问题中的任意形状夹杂,可以借助矩形基本单元将其离散-叠加来进行数值求解。以多边形夹杂和圆形夹杂为例,将本文数值解与有限元软件计算结果进行对比,验证了本文方法的正确性。

1 记号方法

在平面夹杂问题中,为了求解任意形状夹杂所产生的弹性场,通常可以将任意形状的夹杂离散成大小均

匀的矩形单元,通过叠加每个矩形单元所产生的弹性场得到最终的夹杂解。半平面夹杂解可以从三维半空间夹杂问题退化得到,对于半空间问题中夹杂所引起的位移场和应力场可以采用镜像法或直接通过使用势函数和伽辽金矢量法求得^[16]。

$$u_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Omega} \underline{U}_i[\epsilon^*] d\mathbf{x}', \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \int_{\Omega} \underline{\Theta}_{ij}[\epsilon^*] d\mathbf{x}', & \mathbf{x} \notin \Omega, \\ -\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \int_{\Omega} \underline{\Theta}_{ij}[\epsilon^*] d\mathbf{x}' - \lambda \epsilon_{kk}^* \delta_{ij} - 2\mu \epsilon_{ij}^*, & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

式中: λ 和 μ 为拉梅常数; ν 为泊松比; δ_{ij} 为 Kronecker 符号;本征应变 $[\epsilon^*] = [\epsilon_{11}^*, \epsilon_{22}^*, \epsilon_{33}^*, 2\epsilon_{23}^*, 2\epsilon_{13}^*, 2\epsilon_{12}^*]$, \underline{U}_i 、 $\underline{\Theta}_{ij}$ 分别为与位移和应力相关的势函数的导数的组合,表达式比较繁琐,Liu 等^[16]在附录中给出了其显式表达形式,这里不再赘述。上述积分表达式中存在 4 种形式的积分核,1 种是与全空间夹杂解相关的积分核,3 种与半空间镜像夹杂相关的积分核:即包括与 z 无关的项、与 z 相关的项及与 z^2 相关的项^[16]。由式(2)还可以看出,应力的内外场解在夹杂和基体内的表达式相差 $-\lambda \epsilon_{kk}^* \delta_{ij} - 2\mu \epsilon_{ij}^*$,对于长方体夹杂问题,通过选取合适的响应原函数,应力场可以表达成统一的形式^[12]。

如果令长方体夹杂沿 y 轴方向的长度趋于无穷大,则三维空间问题就会退化成平面应变问题。夹杂问题可以从激励-响应的角度去理解,通过引入矩形夹杂基本单元解的记号方法,可以将复杂的叠加求和运算表示成更加直观、简洁的形式^[17]。假设在半无限大平面 D 中存在一个矩形夹杂 Ω ,夹杂内部分布着均匀的本征应变 $(\epsilon_{11}^*, \epsilon_{22}^*, \epsilon_{33}^*, 2\epsilon_{13}^*)$,基体和夹杂的材料相同,如图 1 所示,矩形的中心位于 (x_0, z_0) ,其边长分别为 $\Delta x, \Delta z$,并且分别平行于其对应的坐标轴。 (x', z') 处的激励 ϵ^* 在任意点 (x, z) 处所产生的响应可以通过对与全平面相关的格林函数 $G_1(x-x', z-z')$ 和与镜像夹杂相关的格林函数 $G_2(x-x', z+z')$ 的积分来求得。

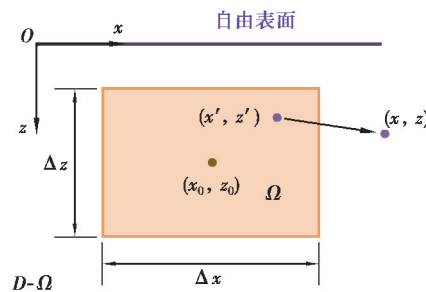


图 1 半平面矩形夹杂示意图

Fig. 1 Schematic diagram of rectangular inclusion in half-plane

与全平面对应的卷积积分可以表示为

$$g_1 = \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} G_1(x-x', z-z') d x' d z'. \quad (3)$$

与镜像项对应的卷积-自相关积分可以表示成

$$g_2 = \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} G_2(x-x', z+z') d x' d z'. \quad (4)$$

考虑如下变量代换

$$\xi_1 = x - x', \xi_3 = \begin{cases} z - z', & \text{与全平面相关项,} \\ z + z', & \text{与镜像项相关项.} \end{cases} \quad (5)$$

使用变量代换,并交换积分上下限后,式(3)(4)可以写成如下表达形式

$$g_1 = \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} G_1(\xi_1, \xi_3) d\xi_1 d\xi_3, \quad (6)$$

$$g_2 = \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_2} \int_{x_1}^{x_2} G_2(\xi_1, \xi_3) d\xi_1 d\xi_3. \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0 - \Delta x/2, \\ x_2 = x - x_0 + \Delta x/2, \\ z_1 = z - z_0 - \Delta z/2, \\ z_2 = z - z_0 + \Delta z/2, \\ \hat{z}_1 = z + z_0 - \Delta z/2, \\ \hat{z}_2 = z + z_0 + \Delta z/2. \end{cases} \quad (8)$$

如果格林函数 $G_1(\xi_1, \xi_3)$ 的原函数为 $\Gamma_1(\xi_1, \xi_3)$,就可以求得式(6)中的积分函数的显式表达形式

$$g_1 = \sum_{a=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 (-1)^{a+\gamma} \Gamma_1(x_a, z_\gamma) = \Gamma_1(x_1, z_1) - \Gamma_1(x_1, z_2) - \Gamma_1(x_2, z_1) + \Gamma_1(x_2, z_2). \quad (9)$$

上述式子中括号里的变量分别表示矩形的 4 个角点指向响应点的向量的分量,根据金晓清等^[17]所引入的记号方法,式(9)可以写成

$$g_1 = \Gamma_1(x, z) | [x_0, z_0; \Delta x, \Delta z]. \quad (10)$$

同样地,如果 $\Gamma_2(\xi_1, \xi_3)$ 是格林函数 $G_2(\xi_1, \xi_3)$ 的原函数,则式(7)的积分结果为

$$g_2 = \sum_{a=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 (-1)^{a+\gamma} \Gamma_2(x_a, \hat{z}_\gamma) = \Gamma_2(x_1, \hat{z}_1) - \Gamma_2(x_1, \hat{z}_2) - \Gamma_2(x_2, \hat{z}_1) + \Gamma_2(x_2, \hat{z}_2). \quad (11)$$

采用上述记号方法,与镜像夹杂相关的响应解 g_2 可以表示成如下形式

$$g_2 = \Gamma_2(x, z) | [x_0, -z_0; \Delta x, \Delta z]. \quad (12)$$

式(10)和式(12)中所采用的记号方法包含了计算场点 (x, z) 处响应所需的全部必要信息,即矩形激励区域的中心坐标 (x_0, z_0) ,矩形边长 $\Delta x, \Delta z$,响应解 g_1 和 g_2 分别是由场点坐标、矩形中点坐标、矩形边长所组成的 4 个积分上下限在响应原函数 $\Gamma_1(x, z)$ 和 $\Gamma_2(x, z)$ 上的代数和。该记号方法直观简洁地表达了响应点与激励点之间的卷积性质,以及响应点与激励镜像点沿 z 轴方向分量之间的自相关性质,在采用半解析数值算法求解任意形状夹杂问题时可以结合快速傅里叶算法进行加速计算。

2 半平面夹杂问题的基本单元解

采用数值离散方法求解任意形状夹杂问题时一般可以通过将计算域离散成大小均匀的矩形单元,然后叠加每个矩形夹杂单元所产生弹性场求出最终的数值解,因此有必要研究单个矩形夹杂产生的位移、应力场,也即半平面夹杂问题的基本单元解。

半平面夹杂问题中位移场的基本单元解的矩阵表达形式如下:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{111} & W_{122} & W_{133} & W_{113} \\ W_{311} & W_{322} & W_{333} & W_{313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \epsilon_{33}^* \\ 2\epsilon_{13}^* \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中,位移影响系数 W_{ikl} 与位移响应原函数 w_{ikl} 之间的关系可以用引入的记号方法表示为

$$W_{ikl} = W_{ikl}^{(0)} + W_{ikl}^{(1)} + z W_{ikl}^{(2)} + z^2 W_{ikl}^{(3)} =$$

$$-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left\{\omega_{ikl}^{(0)} \mid [x_0, z_0; \Delta x, \Delta z] + [\omega_{ikl}^{(1)} + z\omega_{ikl}^{(2)} + z^2\omega_{ikl}^{(3)}] \mid [x_0, -z_0; \Delta x, \Delta z]\right\}. \quad (14)$$

式(14)中 $\omega_{ikl}^{(0)}$ 是全平面夹杂的位移响应原函数,其具体表达式如下:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_{111}^{(0)} &= -2(3-2\nu)\xi_3 \ln r - 4(1-\nu)\xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, \\ \omega_{122}^{(0)} &= -4\nu\left(\xi_3 \ln r + \xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}\right), \\ \omega_{133}^{(0)} &= 2(1-2\nu)\xi_3 \ln r - 4\nu\xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, \\ \omega_{113}^{(0)} &= -2(1-2\nu)\xi_1 \ln r - 4(1-\nu)\xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ \omega_{311}^{(0)} &= 2(1-2\nu)\xi_1 \ln r - 4\nu\xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ \omega_{322}^{(0)} &= -4\nu\left(\xi_1 \ln r + \xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}\right), \\ \omega_{333}^{(0)} &= -2(3-2\nu)\xi_1 \ln r - 4(1-\nu)\xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ \omega_{313}^{(0)} &= -2(1-2\nu)\xi_3 \ln r - 4(1-\nu)\xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}. \end{aligned}\right. \quad (15)$$

其中 $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$ 表示响应点与矩形夹杂角点之间的相对距离。

与三维半空间夹杂问题类似,在二维半平面基体中夹杂所引起的弹性场问题中,与全平面相关的积分核是关于 x, z 的卷积,另外3项与镜像夹杂相关的积分核是关于 x 的卷积和 z 的自相关。式(14)中的 $\omega_{ikl}^{(1)}$, $\omega_{ikl}^{(2)}$, $\omega_{ikl}^{(3)}$ 是与夹杂镜像项有关的位移响应原函数,其具体表达式分别如式(16)(17)(18)所示,其中需要注意的是在这3个式子中变量 $\xi_3 = z + z'$,而 r 表示的是响应点与矩形夹杂角点的镜像点之间的相对距离。

$$\left\{\begin{aligned} \omega_{111}^{(1)} &= -2(5-6\nu)\xi_3 \ln r - 4(1-\nu)\xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, \\ \omega_{122}^{(1)} &= -4(3-4\nu)\nu\left(\xi_3 \ln r + \xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}\right), \\ \omega_{133}^{(1)} &= -2(1-2\nu)\xi_3 \ln r - 4(2-3\nu)\xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, \\ \omega_{113}^{(1)} &= -2(1-2\nu)\xi_1 \ln r + 4(1-\nu)\xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ \omega_{311}^{(1)} &= 2(1-2\nu)\xi_1 \ln r + 4(2-3\nu)\xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ \omega_{322}^{(1)} &= 4(3-4\nu)\nu\left(\xi_1 \ln r + \xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}\right), \\ \omega_{333}^{(1)} &= 2(5-6\nu)\xi_1 \ln r + 4(1-\nu)\xi_3 \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ \omega_{313}^{(1)} &= 2(1-2\nu)\xi_3 \ln r - 4(1-\nu)\xi_1 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}. \end{aligned}\right. \quad (16)$$

$$\begin{cases} \omega_{111}^{(2)} = 4(1-2\nu) \ln r + \frac{4\xi_1^2}{r^2}, & \omega_{122}^{(2)} = -8\nu \ln r, \\ \omega_{133}^{(2)} = -4(3-2\nu) \ln r + \frac{4\xi_3^2}{r^2}, & \omega_{113}^{(2)} = 8(1-\nu) \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} - \frac{4\xi_1 \xi_3}{r^2}, \\ \omega_{311}^{(2)} = 8(1-\nu) \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{4\xi_1 \xi_3}{r^2}, & \omega_{322}^{(2)} = -8\nu \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ \omega_{333}^{(2)} = -8\nu \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3} - \frac{4\xi_1 \xi_3}{r^2}, & \omega_{313}^{(2)} = -4(1-2\nu) \ln r - \frac{4\xi_3^2}{r^2}. \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \omega_{111}^{(3)} = \omega_{313}^{(3)} = \frac{4\xi_3}{r^2}, & \omega_{133}^{(3)} = -\frac{4\xi_3}{r^2}, & \omega_{113}^{(3)} = \omega_{333}^{(3)} = \frac{4\xi_1}{r^2}, \\ \omega_{311}^{(3)} = -\frac{4\xi_1}{r^2}, & \omega_{122}^{(3)} = \omega_{322}^{(3)} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

半平面夹杂问题中应力的基本单元解的矩阵形式可以表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1111} & T_{1122} & T_{1133} & T_{1113} \\ T_{2211} & T_{2222} & T_{2233} & T_{2213} \\ T_{3311} & T_{3322} & T_{3333} & T_{3313} \\ T_{1311} & T_{1322} & T_{1333} & T_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \epsilon_{33}^* \\ 2\epsilon_{13}^* \end{bmatrix}. \quad (19)$$

影响系数 T_{ijkl} 与应力响应原函数 t_{ijkl} 之间的关系可以表示为

$$T_{ijkl} = T_{ijkl}^{(0)} + T_{ijkl}^{(1)} + zT_{ijkl}^{(2)} + z^2T_{ijkl}^{(3)} = -\frac{E}{8\pi(1-\nu^2)} \left\{ t_{ijkl}^{(0)} \mid [x_0, z_0; \Delta x, \Delta z] + [t_{ijkl}^{(1)} + zt_{ijkl}^{(2)} + z^2t_{ijkl}^{(3)}] \mid [x_0, -z_0; \Delta x, \Delta z] \right\}, \quad (20)$$

其中 $t_{ijkl}^{(0)}$ 是全平面矩形夹杂的应力响应原函数,其表达式为:

$$\begin{cases} t_{1111}^{(0)} = 4\arctan \frac{\xi_1}{\xi_3} - \frac{2\xi_1 \xi_3}{r^2}, & t_{1133}^{(0)} = t_{3311}^{(0)} = t_{1313}^{(0)} = \frac{2\xi_1 \xi_3}{r^2}, & t_{1113}^{(0)} = t_{1311}^{(0)} = -2\ln r + \frac{2\xi_1^2}{r^2}, \\ t_{3333}^{(0)} = 4\arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} - \frac{2\xi_1 \xi_3}{r^2}, & t_{3313}^{(0)} = t_{1333}^{(0)} = -2\ln r + \frac{2\xi_3^2}{r^2}, & t_{1122}^{(0)} = t_{2211}^{(0)} = 4\nu \arctan \frac{\xi_1}{\xi_3}, \\ t_{2233}^{(0)} = t_{3322}^{(0)} = 4\nu \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, & t_{2222}^{(0)} = 4 \left(\arctan \frac{\xi_1}{\xi_3} + \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} \right), & t_{1322}^{(0)} = t_{2213}^{(0)} = -4\nu \ln r. \end{cases} \quad (21)$$

$t_{ijkl}^{(1)}, t_{ijkl}^{(2)}, t_{ijkl}^{(3)}$ 是与镜像项有关的应力响应原函数,其具体表达式分别为:

$$\begin{cases} t_{1111}^{(1)} = -4\arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} - \frac{6\xi_1 \xi_3}{r^2}, & t_{1122}^{(1)} = -12\nu \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, & t_{1133}^{(1)} = -8\arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{6\xi_1 \xi_3}{r^2}, \\ t_{1113}^{(1)} = -2\ln r - \frac{6\xi_1^2}{r^2}, & t_{2211}^{(1)} = -4\nu \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} - \frac{8\nu \xi_1 \xi_3}{r^2}, & t_{2222}^{(1)} = -16\nu^2 \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, \\ t_{2233}^{(1)} = -12\nu \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} - \frac{8\nu \xi_1 \xi_3}{r^2}, & t_{2213}^{(1)} = -4\nu \ln r + \frac{8\nu \xi_1^2}{r^2}, & t_{3311}^{(1)} = -\frac{2\xi_1 \xi_3}{r^2}, \\ t_{3322}^{(1)} = -4\nu \arctan \frac{\xi_3}{\xi_1}, & t_{3333}^{(1)} = -2\arctan \frac{\xi_3}{\xi_1} + \frac{2\xi_1 \xi_3}{r^2}, & t_{3313}^{(1)} = -2\ln r - \frac{2\xi_1^2}{r^2}, \\ t_{1311}^{(1)} = -2\ln r + \frac{2\xi_1^2}{r^2}, & t_{1322}^{(1)} = -4\nu \ln r, & t_{1333}^{(1)} = -2\ln r - \frac{2\xi_1^2}{r^2}, \\ t_{1313}^{(1)} = -\frac{2\xi_1 \xi_3}{r^2}. \end{cases} \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{1111}^{(2)} = \frac{12\xi_1}{r^2} - \frac{8\xi_1^3}{r^4}, \quad t_{1122}^{(2)} = -\frac{8\nu\xi_1}{r^2}, \quad t_{1133}^{(2)} = -\frac{12\xi_1}{r^2} - \frac{8\xi_1\xi_3^2}{r^4}, \\ t_{1113}^{(2)} = -\frac{12\xi_3}{r^2} - \frac{8\xi_1^2\xi_3}{r^4}, \quad t_{2211}^{(2)} = \frac{8\nu\xi_1}{r^2}, \quad t_{2222}^{(2)} = 0, \\ t_{2233}^{(2)} = -\frac{8\nu\xi_1}{r^2}, \quad t_{3311}^{(2)} = \frac{4\xi_1}{r^2} - \frac{8\xi_3^2\xi_1}{r^4}, \quad t_{2213}^{(2)} = -\frac{8\nu\xi_3}{r^2}, \\ t_{3322}^{(2)} = \frac{8\nu\xi_1}{r^2}, \quad t_{3333}^{(2)} = \frac{4\xi_1}{r^2} + \frac{8\xi_1\xi_3^2}{r^4}, \quad t_{3313}^{(2)} = -\frac{4\xi_3}{r^2} + \frac{8\xi_3^3}{r^4}, \\ t_{1311}^{(2)} = \frac{4\xi_3}{r^2} - \frac{8\xi_1^2\xi_3}{r^4}, \quad t_{1322}^{(2)} = -\frac{8\nu\xi_3}{r^2}, \quad t_{1333}^{(2)} = -\frac{4\xi_3}{r^2} - \frac{8\xi_3^3}{r^4}, \\ t_{1313}^{(2)} = \frac{4\xi_1}{r^2} + \frac{8\xi_1\xi_3^2}{r^4}. \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{1111}^{(3)} = t_{3333}^{(3)} = t_{1313}^{(3)} = -\frac{8\xi_1\xi_3}{r^4}, \quad t_{1133}^{(3)} = t_{3311}^{(3)} = \frac{8\xi_1\xi_3}{r^4}, \\ t_{1113}^{(3)} = t_{1333}^{(3)} = \frac{4}{r^2} - \frac{8\xi_1^2}{r^4}, \quad t_{3313}^{(3)} = t_{1311}^{(3)} = -\frac{4}{r^2} + \frac{8\xi_1^2}{r^4}, \\ t_{1122}^{(3)} = t_{2211}^{(3)} = t_{2222}^{(3)} = t_{2233}^{(3)} = t_{2213}^{(3)} = t_{3322}^{(3)} = t_{1322}^{(3)} = 0. \end{array} \right. \quad (24)$$

根据平面应变条件,可以验证由面内本征应变 ε_{11}^* , ε_{33}^* 引起的出平面方向的应力满足 $\sigma_{22} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})$ 。通过以上公式获得平面应变情况下半平面夹杂问题的应力场基本单元解后,可以直接将平面应变解转化为平面应力解。在平面应力问题中, $\sigma_{22} = 0$,因此与 y 有关的应力响应原函数均等于0。此外通过把式(20)中的 E 换成 $\frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}$, ν 换成 $\frac{\nu}{1+\nu}$,可以得到平面应力情况下半平面夹杂问题的应力场基本单元解。在获得上述应力解后,进一步利用胡克定律可以得到应变解。

3 半平面任意形状夹杂数值算法

对于半平面夹杂问题,采用有限元法计算时需要在半无限域上进行网格离散,也即计算域尺寸需要远远大于夹杂尺寸,而且还需在夹杂边界周围细化网格才能满足计算精度。基于上一节中求得半平面夹杂的基本单元解,只需将包含任意形状夹杂的矩形有限计算域离散成 $N_x \times N_z$ 个大小均匀的矩形网格单元,计算域的中心为 (x_0, z_0) ,边长分别为 $2a, 2b$ 。激励场单元和响应场单元中点的位置编号分别定义为 (m', n') 和 (m, n) 。为了避免在运算过程中进行坐标变换增加计算量,矩形单元的边分别平行于对应的坐标轴,边长分别为 $\Delta x, \Delta z$,如图2所示。

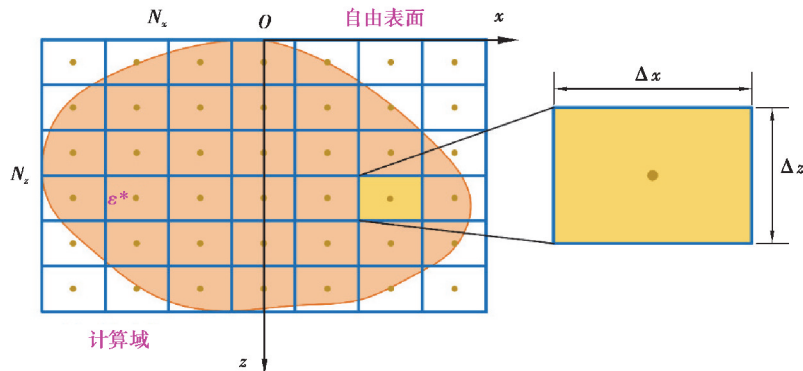


图2 半平面任意形状夹杂矩形单元离散示意图

Fig. 2 Schematic diagram of discrete rectangular element of arbitrarily shaped inclusion in half-plane

以位移解为例,通过叠加离散后的矩形单元解,就可以得到任意形状夹杂位移场的数值解,如式(25)所示。应力解可以通过同样的离散方法求得。

$$\begin{aligned}
 u_i(m, n) = & \sum_{n'=1}^{N_z} \sum_{m'=1}^{N_x} W_{ikl}^{(0)}(m-m', n-n') \epsilon_{kl}^*(m'+n') + \\
 & \sum_{n'=1}^{N_z} \sum_{m'=1}^{N_x} W_{ikl}^{(1)}(m-m', n-n') \epsilon_{kl}^*(m'+n') + \\
 & z \sum_{n'=1}^{N_z} \sum_{m'=1}^{N_x} W_{ikl}^{(2)}(m-m', n-n') \epsilon_{kl}^*(m'+n') + \\
 & z^2 \sum_{n'=1}^{N_z} \sum_{m'=1}^{N_x} W_{ikl}^{(3)}(m-m', n-n') \epsilon_{kl}^*(m'+n')。
 \end{aligned} \tag{25}$$

通过矩形基本单元离散任意形状夹杂,再叠加求和通常需要进行大量的数值计算,可结合快速傅里叶变换算法进行加速计算^[16, 18]。为了验证半平面夹杂基本单元解的正确性,以多边形夹杂和圆形夹杂为例,如图 3 所示,考虑在无限大的半平面基体材料中存在着一个正六边形/圆形夹杂,夹杂的中心位于(0, c),边长/半径为 a,本征应变为(ε₁₁^{*}, ε₂₂^{*}, ε₃₃^{*}, 2ε₁₃^{*}),在夹杂内部均匀分布,夹杂和基体的材料相同,弹性模量和泊松比分别为 E, ν, 目标线选取 z=c, 具体参数见表 1。

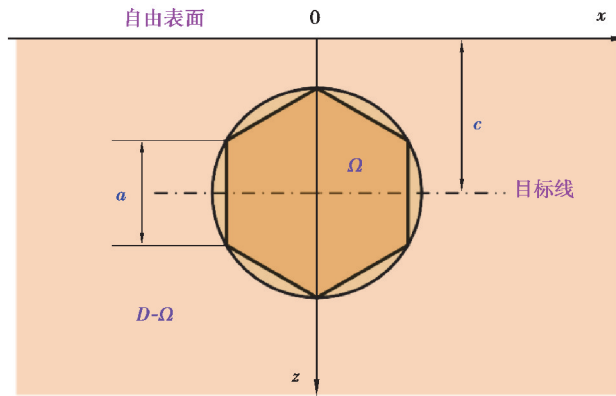


图 3 半平面六边形/圆形夹杂模型示意图

Fig. 3 Schematic diagram of hexagon/circular inclusion model in half-plane

表 1 半平面六边形/圆形夹杂模型参数

Table 1 Parameters of hexagon/circular inclusion model in half plane

网格 $N_x \times N_z$	弹性模量 E/GPa	泊松比 ν	夹杂中心坐标	六边形边长/圆形半径 a/mm	本征应变
200×200	210	0.3	(0, 2)	1	$[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \times 10^{-3}$

利用 FORTRAN 编程得到的数值解和 ABAQUS 有限元解进行对比验证,目标线的起始点坐标分别为 (-2, 2)和(2, 2)。为了消除量纲对数据对比带来的影响,需要对应力和输出点位置进行无量纲化处理,即 $u_0 = a \epsilon^* / 8\pi(1-\nu)$, $\sigma_0 = E \epsilon^* / 8\pi(1-\nu^2)$ 。从图 4,5 中可以看出,通过矩形基本单元离散的半平面六边形/圆形夹杂解和有限元解有着较好的吻合度,位移场在夹杂边界处是连续的,但应力场的某些分量在经过夹杂边界的时候出现了跳跃,这是由于在全平面应力解中 $[\arctan \xi_1/\xi_3 + \arctan \xi_3/\xi_1] | [x_0, z_0; \Delta x, \Delta z]$ 项在夹杂内场的值为 2π ,在外场时为 0,所以应力 σ_{22}, σ_{33} 的数值在夹杂边界处刚好相差一个常数。前述推导的应力响应原函数对夹杂内外应力场都是适用的,说明通过选取合适的响应原函数,可以将半平面夹杂弹性场的基本单元解写成统一的形式,表达式更加紧凑简洁,便于编程,也进一步验证了基本解的正确性。

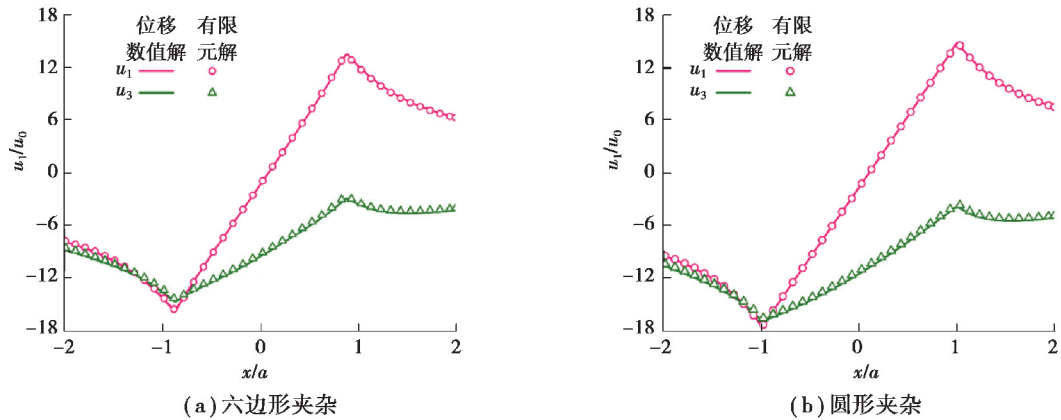


图 4 位移数值解和有限元解对比结果

Fig. 4 Verification of the displacement numerical solutions with FEM results

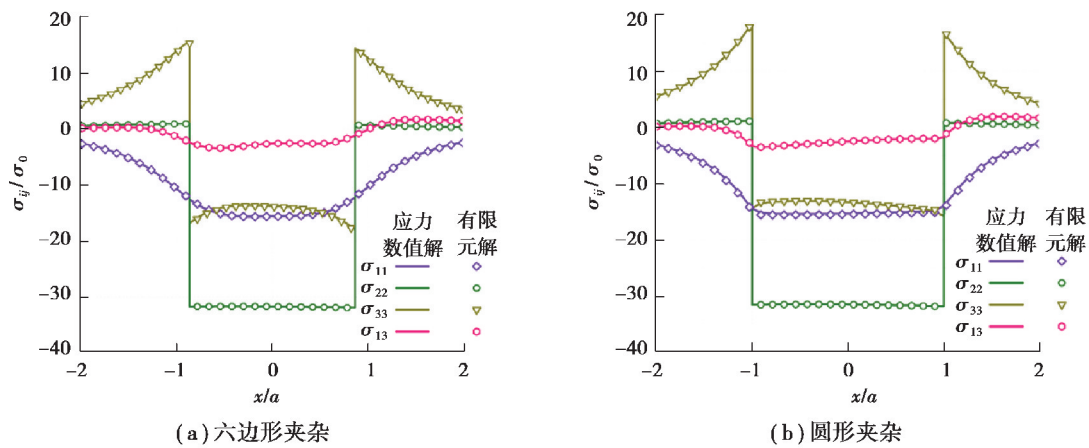


图 5 应力数值解和有限元解对比结果

Fig. 5 Verification of the stress numerical solutions with FEM results

4 结 论

1) 通过将长方体夹杂的一个维度无限延展的极限算法, 推导了平面应变问题中二维半平面矩形夹杂的位移、应力场的基本单元解。与经典的 Eshelby 椭球夹杂解相比, 矩形夹杂内外弹性场的解析解可以写成统一的形式。进一步还可以通过平面应变和平面应力的转化关系, 将文中提出的基本单元解应用到平面应力情况。

2) 以位移解为例, 通过矩形单元离散任意形状夹杂, 推导了半平面任意形状夹杂位移场的数值解形式, 将提出的基本单元解应用于求解半平面夹杂问题弹性场的数值解。

3) 以半平面正六边形和圆形夹杂为例, 将本文中的数值方法与有限元软件仿真结果进行对比, 验证了所推导的矩形基本单元解及数值算法的正确性。

参考文献:

- [1] Mura T. Micromechanics of defects in solids[M]. Second, revised ed. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [2] Cheng H C, Tai L C, Liu Y C. Theoretical and experimental investigation of warpage evolution of flip chip package on packaging during fabrication[J]. Materials, 2021, 14(17): 4816.
- [3] 黄涛, 廖秋慧, 吴文云, 等. 叠层芯片结构 QFN 封装导电胶分层失效行为分析[J]. 电子元件与材料, 2020, 39(9):

97-104.

Huang T, Liao Q H, Wu W Y, et al. Analysis of delamination failure behavior of QFN packaging conductive adhesive with laminated chip structure[J]. *Electronic Components and Materials*, 2020, 39(9): 97-104. (in Chinese)

- [4] 朱诚意, 罗小燕, 李光强, 等. 无取向硅钢中含镁夹杂物的形成机理分析[J]. *重庆大学学报*, 2018, 41(8): 34-43.
Zhu C Y, Luo X Y, Li G Q, et al. Formation mechanism analysis on magnesium-bearing inclusions in non-oriented silicon steels[J]. *Journal of Chongqing University*, 2018, 41(8): 34-43. (in Chinese)
- [5] He J Y, Wang H, Huang H L, et al. A precipitation-hardened high-entropy alloy with outstanding tensile properties[J]. *Acta Materialia*, 2016, 102: 187-196.
- [6] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 1957, 241(1226): 376-396.
- [7] Chiu Y P. On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1977, 44(4): 587-590.
- [8] Chiu Y P. On the stress field and surface deformation in a half space with a cuboidal zone in which initial strains are uniform[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, 45(2): 302-306.
- [9] Chiu Y P. On the internal stresses in a half plane and a layer containing localized inelastic strains or inclusions[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, 47(2): 313-318.
- [10] Hu S M. Stress from a parallelepipedic thermal inclusion in a semispace[J]. *Journal of Applied Physics*, 1989, 66(6): 2741-2743.
- [11] Ru C Q. Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1999, 66(2): 315-523.
- [12] Jin X Q, Keer L M, Wang Q. New Green's function for stress field and a note of its application in quantum-wire structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, 46(21): 3788-3798.
- [13] Jin X Q, Keer L M, Wang Q. A closed-form solution for the Eshelby tensor and the elastic field outside an elliptic cylindrical inclusion[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2011, 78(3): 031009.
- [14] Jin X Q, Zhang X N, Li P, et al. On the displacement of a two-dimensional Eshelby inclusion of elliptic cylindrical shape[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, 84(7): 074501.
- [15] Li P, Zhang X N, An Y H, et al. Analytical solution for the displacement of a polygonal inclusion with a special application to the case of linear eigenstrain[J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2020, 84: 104049.
- [16] Liu S B, Jin X Q, Wang Z J, et al. Analytical solution for elastic fields caused by eigenstrains in a half-space and numerical implementation based on FFT[J]. *International Journal of Plasticity*, 2012, 35: 135-154.
- [17] 金晓清, 牛飞飞, 张睿, 等. 均布激励基本单元解析解的一种记号方法[J]. *上海交通大学学报*, 2016, 50(8): 1221-1227.
Jin X Q, Niu F F, Zhang R, et al. A notation for elementary solution to uniformly distributed excitation over a rectangular/cuboidal domain[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2016, 50(8): 1221-1227. (in Chinese)
- [18] Sun L L, Wang Q, Zhang M Q, et al. Discrete convolution and FFT method with summation of influence coefficients (DCS - FFT) for three-dimensional contact of inhomogeneous materials[J]. *Computational Mechanics*, 2020, 65(6): 1509-1529.

(编辑 张 苹)