

doi:10.11835/j.issn.1000-582X.2021.254

# 凹凸边界形状热弹性问题的自适应无网格法

杨 澜, 蹇开林, 张 亮

(重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044)

**摘要:**为了解决具有凹凸边界形状的平面非定常拟静态热力耦合问题,采用无网格伽辽金算法(EFG)进行求解,使用移动最小二乘法构造形函数及拉格朗日乘子法处理本质边界条件(第一类边界条件),通过引入 Voronoi 邻接准则和后验误差式,对后续结果进行自适应优化;构建了一种新的适用于非定常拟静态热力耦合问题的 EFG 法自适应计算模型。为了验证计算模型的可行性,分别计算在二维混合边界条件下光滑与凹凸边界形状平面的温度场以及位移场的分布,并与有限单元法的计算结果进行对比,表征了有限单元法和无网格法计算结果的差异,验证了非定常拟静态热力耦合问题的 EFG 法计算模型的有效性和精确性。

**关键词:**无网格伽辽金方法;MLS;耦合热弹性力学;后验误差式;自适应

中图分类号:O343.1

文献标志码:A

文章编号:1000-582X(2022)12-036-12

## Adaptive meshless method for thermoelastic problems with concave convex boundary

YANG Lan, JIAN Kailin, ZHANG Liang

(College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** In order to solve the plane unsteady and quasi-static coupled thermoelasticity problems with concave convex boundary shape, the element free Galerkin method (EFG) is used. The subsequent results are adaptively optimized by using the moving least square method (MLS) to construct the shape function and the Lagrange multiplier method to deal with the essential boundary conditions (the first kind of boundary conditions), as well as introducing the Voronoi adjacency criterion and the posteriori error formula. Then a new EFG adaptive model for unsteady quasi-static and coupled thermoelasticity problems is constructed. To verify the model's feasibility, the temperature field and displacement field distribution in the planes with smooth and concave convex boundary shape are calculated under two-dimensional mixed boundary conditions. The results are compared with those of finite element method. The difference between the results of finite element method and meshless method is characterized, and the effectiveness and accuracy of EFG for unsteady quasi-static thermoelasticity coupled problems are verified.

**Keywords:** element-free Galerkin method (EFG); moving least square method (MLS); coupled thermoelasticity; posteriori error formula; adaptive method

收稿日期:2021-01-31 网络出版日期:2021-05-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11872133)。

Supported by National Natural Science Foundation of China(11872133).

作者简介:杨澜(1995—),男,硕士研究生,主要研究方向为固体力学计算,(E-mail)ylgzyouxiang@163.com。

通信作者:蹇开林(1965—),男,教授,博士生导师,主要从事结构动力学、多体系统动力学、结构振动与控制、结构动力优化以及流固耦等方向的研究工作,(E-mail)cqjian@cqu.edu.cn。

热力耦合现象存在于众多的高新技术中,诸如航空发动机、汽车发动机和电子器件等一系列装置,特别是结构界面接触传热的研究。在实际情况下,结构部件的加工表面不可能是绝对平整光滑的,而是由许多微观的不规则的凸峰和凹谷组成的粗糙表面,而边界面的凹凸形状是直接影响耦合分析的核心因素。将热力耦合分析与计算力学相结合的数值模拟方法已经成为重要的研究方向,寻求合适的计算方法以及如何优化精确温度场和位移场分布依旧是热点问题。正因如此,结构界面接触传热的研究正逐步从简单走向复杂、从宏观走向微观、从表象走向机理、从定性走向定量,其建模方法和分析手段面临着巨大的挑战。

由材料的本构关系、热力学基本定律以及自由能表达推导的热传导方程式可以知道温度场的分布受位移场的影响<sup>[1-8]</sup>,而位移场的分布也受温度的影响,这是典型的耦合问题,需将位移场和温度场二者耦合求解;在针对耦合热应力问题求解方面,Nowinski<sup>[4]</sup>提出了耦合作用是将机械能转化成热能,继而耗散掉;Biot等<sup>[9]</sup>提出将热容量作为一个新的状态变量引入虚耗散的热力学原理中,由此导出的场方程将具有积分-微分形式,避免了因考虑热源而需引入的另一变量熵;Nariboli<sup>[10]</sup>用 Laplace 变换法研究了球形空腔壁温度突然有跳跃的热弹性动力学问题;Takeuti 等<sup>[11]</sup>用热弹性位势和 Love 位移函数求解了轴对称有限圆柱动态耦合热应力问题;Oden<sup>[12]</sup>用有限单元法计算了各种物性系数下的半空间耦合问题并与精确解进行比较;王林翔等<sup>[13]</sup>用微分代数的方法求解了耦合热弹性动力学问题;Gao<sup>[14]</sup>用边界元法进行热弹性动力学问题的求解。

针对于热力耦合现象,求解的问题分为两种,一种是动态的热力耦合问题,即耦合热弹性动力学问题,另一种是准静态的热力耦合问题,即非定常拟静态的热力耦合问题。区分二者的关键在于外部机械载荷或者热载荷随时间的变化是否剧烈,也就是载荷是否具备冲击的性质,当载荷不具备冲击性质时,位移产生的加速度项影响很小可忽略,这种并非静态问题但可忽略加速度影响的计算方法,称其为准静态的计算方法,大多数的工程实践问题都属于准静态的范畴,这样一来可以极大地简化计算过程。有限元方法是求解热力耦合问题的主要方法,但计算精度受网格影响较大,在处理庞大的工程结构时,网格划分是一项巨大的任务,并且基于静态形函数的变形描述很难充分逼近弹性体在热力耦合作用下的真实位移场,因此近年来有不少学者提出了使用无网格方法解决耦合热弹性问题<sup>[15]</sup>。无网格方法<sup>[16-18]</sup>摆脱了网格的束缚,在计算域内使用节点分布去代替网格作用,计算点的形函数随着计算点变化而变化,即使在计算节点分布不规则时,计算精度的损失也较小;并且由于节点生成较为方便,因而自适应性能优越,将自适应技术引入无网格方法,能够合理有效地增加节点密度,继而保证计算精度,避免因为节点数量和位置的不合理造成的精度失准,在计算凹凸边界时,二者的结合能够克服凹凸边界网格难以划分问题,同时又能保证计算精度的不失准。笔者以无网格伽辽金算法(EFG)计算了二维混合边界条件下的非定常拟静态热力耦合问题,以移动最小二乘法(MLS)构建了形函数,应用后验误差公式结合采用 H 型自适应计算,提出了适用于非定常温度场拟静态热力耦合问题的 EFG 法计算模型,最后以数值算例验证了本文方法的可行性。

## 1 移动最小二乘法(MLS)

考虑平面域  $\Omega$  的某一场变量  $u(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = ((x, y))$  表示在平面域  $\Omega$  内的某一点的坐标) 的未知标量函数,则定义在点  $\mathbf{x}$  的 MLS 近似表达式为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

式中  $(\mathbf{p}(\mathbf{x}))$  是关于二维空间坐标  $\mathbf{x} = (x, y)$  的基函数。此基函数通常为利用 Pascal 三角形所决定的单项式以确保其最小完备性。 $m$  表示为基函数完备项的个数。

在二维空间中单项式基函数为:

$$\text{线性基} \quad m=3 \quad (\mathbf{p}(\mathbf{x}))^T = [1, x, y], \quad (2)$$

$$\text{二次基} \quad m=6 \quad (\mathbf{p}(\mathbf{x}))^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2], \quad (3)$$

$$(\mathbf{a}(\mathbf{x})) = [a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_m(\mathbf{x})], \quad (4)$$

式中  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  为待定参数向量。

现将二维求解域  $\Omega$  用  $N$  个节点进行离散,每个节点的节点值  $u_I$  已知,在每个节点  $\mathbf{x}_I$  ( $I=1, 2, \dots, N$ ) 处定义一个权函数  $\omega_I(\mathbf{x})$ ,并且该函数是紧支的,即在支撑域  $\Omega_I$  中权函数大于零,而在支撑域外面权函数等于

零,支撑域形状常见有矩形和圆形,如图 1 所示。

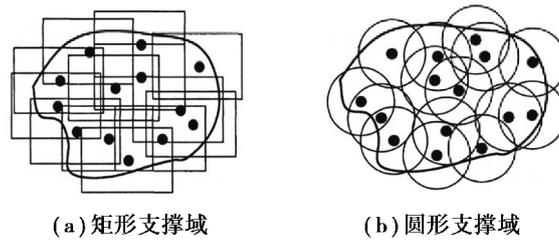


图 1 不同类型支撑域示意图

Fig. 1 Schematic diagram of different types of support domain

为计算方便,这里采用矩形支撑域,以及 3 次样条插值权函数。当支撑域为矩形时,

$$\omega_I(\mathbf{x}) = \omega_I(r_x) \omega_I(r_y), \quad (5)$$

$$r_x = \frac{|x - x_I|}{L} \quad r_y = \frac{|y - y_I|}{D}. \quad (6)$$

式中: $L, D$  分别为矩形支撑域的长和宽。为求  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , 定义泛函  $J$ :

$$J = \sum_{I=1}^N \omega_I(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}) - u_I]^2 = \sum_{I=1}^N \omega_I(\mathbf{x}) \left[ \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) - u_I \right]^2. \quad (7)$$

对  $J$  取最小值,即  $J$  关于  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  取驻值  $\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0\right)$ , 可得式(8), 即

$$[\mathbf{A}(\mathbf{x})]_{m \times m} (\mathbf{a}(\mathbf{x}))_{m \times 1} = [\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{m \times N} [\mathbf{U}]_{N \times 1}, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \omega_I(\mathbf{x}) (p(\mathbf{x})) (p(\mathbf{x}))^T,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\omega_1(\mathbf{x}) (p\mathbf{x}_1) \omega_2(\mathbf{x}) (p\mathbf{x}_2) \omega_3(\mathbf{x}) (p\mathbf{x}_3) \cdots \omega_N(\mathbf{x}) (p\mathbf{x}_N)], \quad (9)$$

$\mathbf{U} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \cdots \quad u_N]^T$  是域  $\Omega$  中所有节点的节点值所形成的向量。

继而可得

$$u^h(\mathbf{x}) = (p(\mathbf{x}))^T [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \quad (10)$$

式中: $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x}) \quad N_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad N_N(\mathbf{x})]$ , 类似于有限单元法中的形函数, 不同之处在于无网法中的形函数是关于全求解域, 而有限单元法中的形函数是关于单元区域。

## 2 耦合热应力问题的 EFG 方法

### 2.1 耦合热应力控制方程

设线性耦合热弹性力学的求解区域为二维平面  $\Omega$ ,  $\Gamma$  为求解平面的边界。热弹性力学中的应力应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_{kk} \boldsymbol{\delta}_{ij} - \beta \theta \boldsymbol{\delta}_{ij}, \quad (11)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$  是应力; $\mu, \lambda$  代表拉梅常数; $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$  代表应变; $\beta$  代表热应力系数; $\theta$  代表物体相对于初始温度  $T_0$  的温差 ( $\theta = T - T_0$ )。

在小变形条件下:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2. \quad (12)$$

在处理耦合热应力问题时, 采用分区变分原理, 即温度场和位移场分别采用变分离散, 再并行求解, 经典热弹性力学理论中温度场和位移场的控制方程及边界条件如下:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + \mathbf{b}_i = 0, \quad (13)$$

$$kT_{,ii} - \rho c T - \beta T_0 \dot{u}_{i,i} + Q = 0. \quad (14)$$

式中: $\rho$  为质量密度; $\dot{u}_{i,i}$  为体积应变率; $c$  为比热容; $k$  为热传导系数; $Q$  为热源; $\mathbf{b}_i$  为体力。在边界  $\Gamma$  上, 边

界为混合边界条件,既包含力学边界条件也包含热学边界条件:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{当 } x \in \Gamma_u, \quad (15)$$

$$\mathbf{T}_i(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{T}}_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{当 } x \in \Gamma_T, \quad (16)$$

$$k \mathbf{T}_{,i} \mathbf{n}_{,i} = \xi(\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) + \bar{\mathbf{q}}, \quad \text{当 } x \in \Gamma_{q \cup \xi}. \quad (17)$$

式中:  $\bar{\mathbf{u}}_i$  为边界上给定位移;  $\bar{\mathbf{T}}_i$  为给定边界温度;  $\xi$  为换热系数;  $\mathbf{T}_A$  为环境温度;  $\bar{\mathbf{q}}$  为边界上指定热流量;  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_T$  为第一类边界,  $\Gamma_{q \cup \xi}$  是二三类混合边界。

## 2.2 耦合热应力控制方程的弱形式及离散化

在二维求解区域内采用  $N$  个节点进行离散,在整体区域内采用加权余量法弱式,以温度  $\mathbf{T}$  的变分  $\delta \mathbf{T}$ , 及位移  $\mathbf{U}$  的变分  $\delta \mathbf{U}$  作为试函数进行离散,可得式(12)的离散形式:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{T} (k \mathbf{T}_{,ii} - \rho c \dot{\mathbf{T}} - \beta \mathbf{T}_0 \dot{\mathbf{u}}_{i,i} + \mathbf{Q}) d\Omega = 0. \quad (18)$$

运用分部积分和高斯散度定理,并施加边界条件可得:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{I}^*(\mathbf{T}) = & \int_{\Omega} [k(\nabla^T \mathbf{T}) \delta \nabla \mathbf{T} - \mathbf{Q} \delta \mathbf{T} + \rho c \dot{\mathbf{T}}] d\Omega + \int_{\Omega} \beta \mathbf{T}_0 \delta \mathbf{T} d\Omega \dot{\mathbf{u}}_{i,i} + \\ & \int_{\Gamma_{q \cup \xi}} \xi \mathbf{T} \delta \mathbf{T} d\Gamma - \int_{\Gamma_{q \cup \xi}} \xi \mathbf{T}_A \delta \mathbf{T} d\Gamma - \int_{\Gamma_{q \cup \xi}} \bar{\mathbf{q}} \delta \mathbf{T} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

因为移动最小二乘法 (MLS) 构建的形函数并不满足 Kronecker delta 特性,因此在式(18)的基础上使用拉格朗日乘子法对求解域进行本质边界条件(第一类边界条件)施加。

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{I}^*(\mathbf{T}) = & \int_{\Omega} [k(\nabla^T \mathbf{T}) \delta \nabla \mathbf{T} - \mathbf{Q} \delta \mathbf{T} + \rho c \dot{\mathbf{T}}] d\Omega + \int_{\Omega} \beta \mathbf{T}_0 \delta \mathbf{T} d\Omega \dot{\mathbf{u}}_{i,i} + \int_{\Gamma_{q \cup \xi}} h \mathbf{T} \delta \mathbf{T} d\Gamma - \\ & \int_{\Gamma_{q \cup \xi}} h \mathbf{T}_A \delta \mathbf{T} d\Gamma - \int_{\Gamma_{q \cup \xi}} \bar{\mathbf{q}} \delta \mathbf{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} \lambda \delta \mathbf{T} + \delta \lambda (\mathbf{T} - \bar{\mathbf{T}}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

式(18)中  $\lambda$  为拉格朗日乘子,其视为坐标的位置函数,可利用本质边界条件上的节点进行插值。

$$\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_{n_\lambda-1} \quad \varphi_{n_\lambda}], \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{n_\lambda-1} \quad \lambda_{n_\lambda}]^T, \quad (22)$$

$$\lambda = \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\Lambda}, \quad (23)$$

式中:  $\varphi_i$  为拉格朗日插值函数;  $\lambda_i$  为本质边界条件上用于插值的节点值;  $n_\lambda$  为本质边界上用于拉格朗日插值的节点数目。

同理运用上述的变分过程外加在本质边界条件上施加拉格朗日乘子法,对位移场的控制方程(13)进行离散处理可得到:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{L} \delta \mathbf{u}^T) \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L} \delta \mathbf{u}^T) \mathbf{D}_n d\Omega T - \int_{\Gamma_T} \lambda \delta \mathbf{u} + \delta \lambda (\mathbf{u} - \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma = \\ & \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L} \delta \mathbf{u}^T) \mathbf{D}_n \mathbf{T}_0 d\Omega. \end{aligned} \quad (24)$$

位移场近似函数以及温度场的近似函数分别为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) u_I(t), \quad (25)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) T_I(t). \quad (26)$$

将式(25)和(26)代入式(24)和式(20)中可得到如下方程:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \mathbf{T}_n + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{T}_n}{\partial t} + \mathbf{G}_u \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\Lambda}_T = \mathbf{F}_T, \\ \mathbf{G}_1^T = \mathbf{q}_T, \\ \mathbf{K}_u \mathbf{u}_n + \mathbf{G}_T \mathbf{T}_n + \mathbf{G}_2 \boldsymbol{\Lambda}_u = \mathbf{F}_u, \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{u}_n = \mathbf{q}_u. \end{cases} \quad (27)$$

式中:

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} k \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,i}^T d\Omega + \int_{\Gamma_3} \xi \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad (28)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad (29)$$

$$\mathbf{G}_u = \beta \mathbf{T}_0 \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right] [\mathbf{H}]^T d\Omega \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad (30)$$

$$G_1^{Ik} = \int_{\Gamma_T} N_I \varphi_k d\Gamma, \quad (31)$$

$$\mathbf{K}_u = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad (32)$$

$$\mathbf{G}_T = - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_n \mathbf{N} d\Omega, \quad (33)$$

$$G_2^{Ik} = \int_{\Gamma_u} N_I \varphi_k d\Gamma, \quad (34)$$

$$\mathbf{F}_T = \int_{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{N} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{q} \mathbf{N} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \xi \mathbf{T}_A \mathbf{N} d\Gamma, \quad (35)$$

$$q_T = \int_{\Gamma_T} \bar{T} \varphi_k d\Gamma, \quad (36)$$

$$\mathbf{F}_u = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_n \mathbf{T}_0 d\Omega, \quad (37)$$

$$\mathbf{q}_u = \int_{\Gamma_u} \bar{u} \varphi_k d\Gamma, \quad (38)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & \cdots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \cdots & 0 & N_n \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\beta = \frac{\alpha E}{(1-\nu)}, \quad (41)$$

$$\mathbf{D}_n = \beta \cdot [1 \quad 1 \quad 0]^T, \quad (42)$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

式中:  $E, \nu$  分别代表平面应力条件下的弹性模量和泊松比,  $\alpha$  是热膨胀系数。

式(27)为施加边界条件以及拉格朗日乘子法后的系统一阶偏微分方程组, 采用向后差分的形式对上述微分方程组进行求解可得如下方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t \mathbf{K}_T \mathbf{T}_n + \mathbf{G}_u \mathbf{u}_n + \mathbf{G}_1 \mathbf{\Lambda}_T = \Delta t \mathbf{F}_T + \mathbf{C} \mathbf{T}_{n-1} + \mathbf{G}_u \mathbf{u}_{n-1}, \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{T}_n = \mathbf{q}_T, \\ \mathbf{K}_u \mathbf{u}_n + \mathbf{G}_T \mathbf{T}_n + \mathbf{G}_2 \mathbf{\Lambda}_u = \mathbf{F}_u, \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{u}_n = \mathbf{q}_u. \end{array} \right. \quad (44)$$

### 2.3 自适应

自适应分析的核心思想是根据已有的数值计算模型判断出该计算区域内的高误差分布区域,然后进行算法调整,继而改进数值计算结果精度。常用的自适应方法有 R 型自适应, H 型自适应, 以及 HP 型自适应。这里采用 H 型自适应, H 型自适应在无网格方法中的本质是节点的增加和删除。它的实现主要包含以下两个方面,一方面是后验误差估计,另一方面就是节点的插入策略。通过引入局部误差计算公式(45)和全局误差计算公式(46),利用 Voronoi 邻接准则去进行节点的添加,分别以设定的局部误差限 $\epsilon_u$ 和全局误差限 $L_u$ 作为局部节点的添加界限和自适应过程终止界限。关于自适应详细的后验误差计算公式的推导过程,鉴于篇幅的原因,此处不再赘述,可参考文献[19-20]。有如下误差估计式。

局部误差估计式:

$$\epsilon(u^h) = \frac{1}{4} \|(\nabla u_2 - \nabla u_1) \Delta x\|_F. \quad (45)$$

全局误差估计式:

$$L(u^h) = \frac{\|\epsilon_u\|_F}{\|u^h\|_F} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N \epsilon_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (u_k^h)^2}}. \quad (46)$$

对公式中的参量做如下说明:设定 $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{X}_2 = (x_2, y_2)$ 是平面中对应的两点, $u_1, u_2$ 分别是以上 2 个点在求解域内对应的场函数值, $\nabla$ 代表梯度, $\Delta x = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 表示两节点构成的向量, $u^h$ 代表利用 EFG 求得的场函数近似值。

## 3 数值算例

为了验证文中所提出计算模型的有效性,选取 2 类数值算例,分别是光滑平板在混合边界条件下的热力耦合问题和具有凹凸边界二维板的热力耦合问题,所选均为平面应变状态,式(40)和(41)的 $E, \nu$ 分别变成 $\frac{E}{1-\nu^2}, \frac{\nu}{1-\nu}$ ,热膨胀系数 $\alpha$ 变成 $(1+\nu)\alpha$ 。

### 3.1 算例 1

此算例是光滑平板在混合边界条件下的热力耦合计算问题,如图 2 所示方板,其长度 $L = 1$  m,宽度 $D = 1$  m,厚度为 1 mm,计算参数按如下公式给定,图 3、4 分别表示网格示意图和布点示意图,左右两端及下端均施加位移约束,在最左端边界上是绝热边界条件,最上端和最右端存在对流热交换,对流热交换系数分别是 $\zeta_2 = 1$ ,  $\zeta_4 = 2$ ,最底部边界是第一类传热边界条件,温度恒为 $0^\circ\text{C}$ ,初始温度场分布是 $T_0 = 50^\circ\text{C}$ ,取分析步长度 $\Delta t_1 = 0.10$  s,  $\Delta t_2 = 0.01$  s,分别迭代 10 步和 100 步,为了更好地对比体现无网格伽辽金法的精度与收敛速度,采用相同网格节点( $21 \times 21$ )的有限单元算法在相同的时间步下进行计算,截取第 231 号节点(0.50, 1.00), 306 号节点(0.70, 0.55)的温度-时间历程图及纵向位移-时间历程图,计算结果如图 5~8 所示。

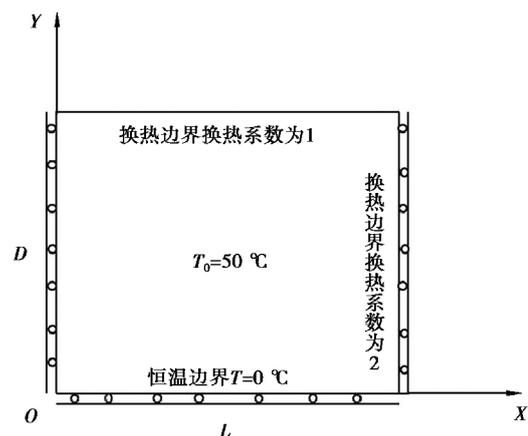


图 2 混合边界条件下的光滑板

Fig. 2 Smooth sliding plate with mixed boundary conditions

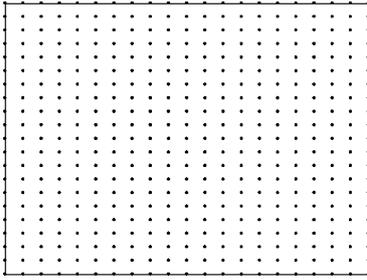


图 3 方板布点图

Fig. 3 Node distribution of square plate

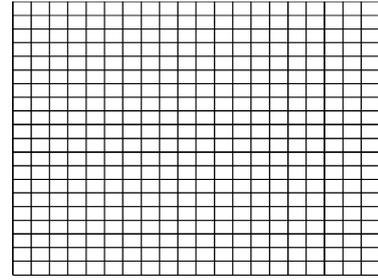


图 4 方板网格图

Fig. 4 Mesh distribution of square plate

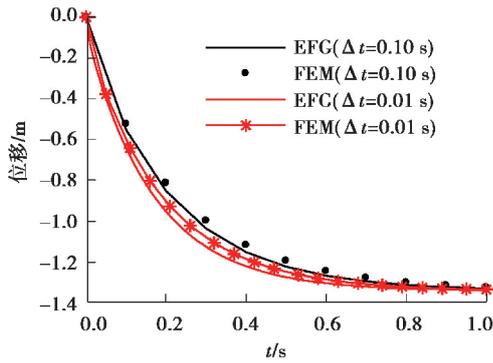


图 5 节点 231 号的时间-位移历程图

Fig. 5 Time-displacement history of node 231

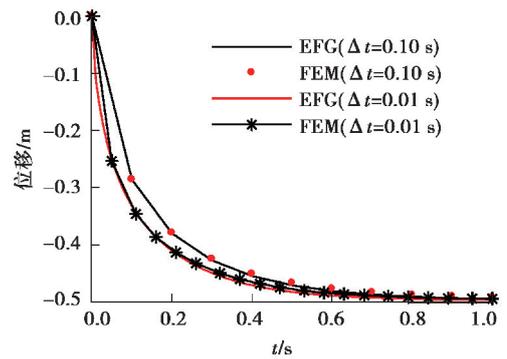


图 6 节点 306 号的时间-位移历程图

Fig. 6 Time-displacement history of node 306

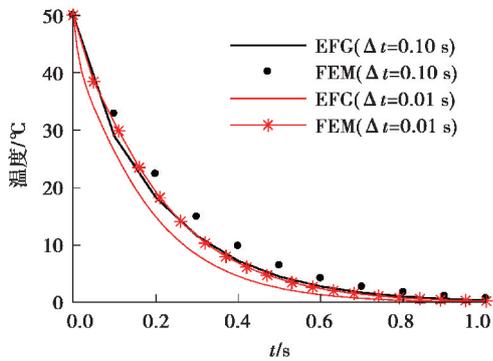


图 7 节点 231 号的时间-温度历程图

Fig. 7 Time-temperature history of node 231

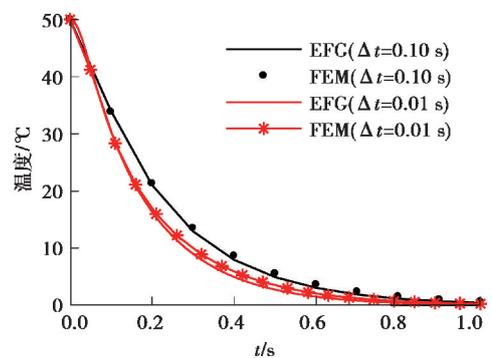


图 8 节点 306 号的时间-温度历程图

Fig. 8 Time-temperature history of node 306

控制方程:

$$k \mathbf{T}_{,ii} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (47)$$

$$\sigma_{ij,i} + b_i = 0. \quad (48)$$

边界条件:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\xi_2}{k}(T - T_A)\right)_{x=L} = 0, \quad (49)$$

$$\mathbf{T}_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\xi_4}{k}(T - T_\infty)\right)_{y=D} = 0, \quad (50)$$

$$u_{x=0} = 0, \quad u_{x=L} = 0, \quad u_{y=L} = 0, \quad (51)$$

$$k = 1, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_4 = 2, \quad \rho = 1, \quad c = 1, \tag{52}$$

$$T_A = 0, \quad E = 1, \quad \nu = 0.3, \quad \alpha = 0.02. \tag{53}$$

从图 5~8 可以看出,无网格方法计算温度值和位移值的精度较有限元法大致相同,但在时间步为 0.10 s 时,EFG 算法的计算结果更加靠近 FEM 算法下 0.01 s 步长时的计算结果,因而无网格方法的收敛速度较有限元收敛速度略快。

### 3.2 算例 2

此算例是凹凸平板在混合边界条件下的热力耦合计算问题,如图 9 所示,长度  $L = 1$  m,宽度  $D = 1$  m,厚度为 1 mm,图 10 和 11 为布点示意图和网格示意图。计算参数按图示给定,左右两端及下端施加位移固定约束,在最左端边界是绝热边界条件,最上端和最右端存在对流热交换,对流热交换系数分别是  $\zeta_2 = 1, \zeta_4 = 2$ ,最底部边界是第一类传热边界条件温度恒为  $0^\circ\text{C}$ ,初始温度场分布是  $T_0 = 50^\circ\text{C}$ ,分析步长度  $\Delta t = 0.001$  s,共计迭代 1 000 步,为了更好地对比体现无网格伽辽金法的计算精度,采用在相同的时间步下进行计算,有限元算法采用四边形八节点二次单元计算,输出顶端凹凸边界的温度场及位移场分布,分别截取 1 s 的计算结果,计算结果如图 12、13 所示。

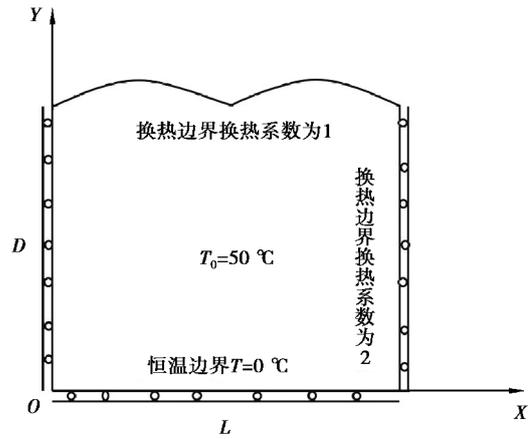


图 9 混合边界条件下的凹凸板  
Fig. 9 Concave convex plate with mixed boundary conditions

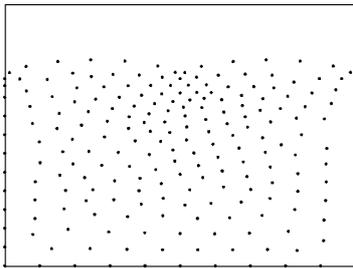


图 10 凹凸板布点图

Fig. 10 Concave convex plate node distribution

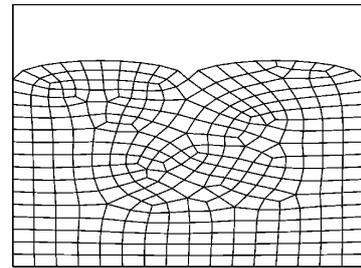


图 11 凹凸板网格图

Fig. 11 Concave convex plate mesh distribution

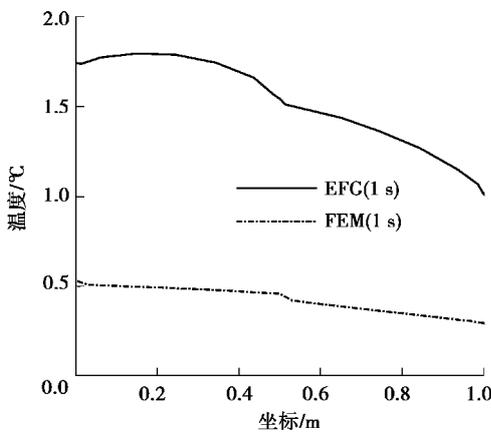


图 12  $t = 1$  s 凹凸边界温度场分布

Fig. 12 Temperature field distribution of concave convex boundary in  $t = 1$  s

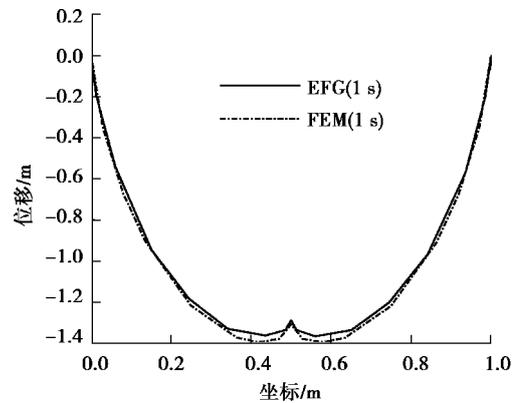


图 13  $t = 1$  s 凹凸边界位移场分布

Fig. 13 Displacement field distribution of concave convex boundary in  $t = 1$  s

控制方程:

$$k \mathbf{T}_{,ii} = \rho c \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}, \quad (54)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij,i} + \mathbf{b}_i = 0. \quad (55)$$

边界条件:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_{x=0} = 0 \quad \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} n_y + \frac{\xi_2}{k} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \right)_{y=D} = 0, \quad (56)$$

$$\mathbf{T}_{y=0} = 0 \quad \left( \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} n_y + \frac{\xi_4}{k} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \right)_{x=L} = 0, \quad (57)$$

$$u_{x=0} = 0, \quad u_{x=L} = 0, \quad u_{y=L} = 0. \quad (58)$$

$$k = 1, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_4 = 2, \quad \rho = 1, \quad c = 1, \quad (59)$$

$$\mathbf{T}_A = 0, \quad E = 1, \quad \nu = 0.3, \quad \alpha = 0.02. \quad (60)$$

由图 12、13 可看出,在  $t=1$  s 时,两种不同的算法下,温度场和位移场差异较大,使用有限元网格节点替代无网格节点并不适用,由移动最小二乘法(MLS)的推导过程,可以知道造成数据偏差较大的原因是无网格伽辽金方法的计算精度受节点密度、节点摆放位置以及权函数多重因素的影响,所以无规律地增加节点密度会影响无网格伽辽金方法计算精度,因此后续应采用自适应技术与之相结合,使用自适应技术控制节点密度合理增加。

### 3.3 算例 3

由 3.2 的算例数据结果分析可知,在采用有限元软件网格节点去进行 EFG 算法计算的过程中,虽然节点的数目变多了,但由于节点布置得不合理,导致比较大的数据误差。自适应能够通过控制节点合理增加,达到确保精度的效果。本算例同样采用图 9 所示的模型和边界条件,出于对计算时间成本的考虑,在处理非定常热力耦合问题的自适应过程中,采用算例 3.2 相同边界条件下的定常温度场静态热力耦合问题的自适应节点布图,节点分布示意如图 14 所示,初始选择简单节点布置共计 26 个节点,支撑域尺寸参数为 3.5,设置局部误差限  $\epsilon_m = 0.001$ ,以及全局误差限  $L(u^h) = 0.020$ ,当自适应结束后,利用得到的节点布图来计算混合边界下热力耦合问题的温度场和位移场。为了方便对比,采用算例 3.2 中的有限元算法下(FEM)四边形八节点单元网格分布进行对比,迭代步长为 0.001 s,共计 1 000 步的热力耦合分析。比较  $t=1$  s 时随着自适应次数增加的温度场和位移场的分布以及 11 号节点(0.50, 1.00)和 15 号节点(0.25, 1.10)的时间-温度历程图和时间-位移历程图。

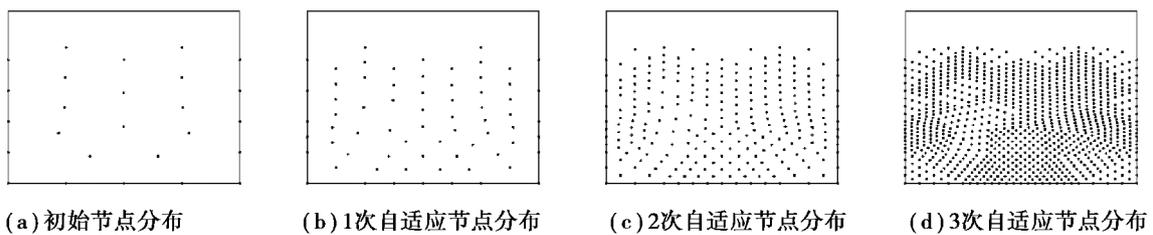


图 14 自适应节点分布过程

Fig. 14 Adaptive node distribution process

从图 15~20 的计算结果分析,在局部放大图中,可以看到随着自适应过程的增加,对于节点 11 和节点 15 而言,不论是温度值还是位移值都随着时间的变化逐渐趋于稳定并且是收敛的,且  $t=1$  s 时整体的温度场和位移场的分布也都是稳定且收敛的。结果表明将后验误差式引入自适应调节之中,能够合理有效地控制节点的增加,继而保证计算精度,自适应技术与无网格方法相结合能够应对具有凹凸边界作用下热力耦合问题,为后续无网格方法的程序化、软件化及商业化提供了十分良好的案例。

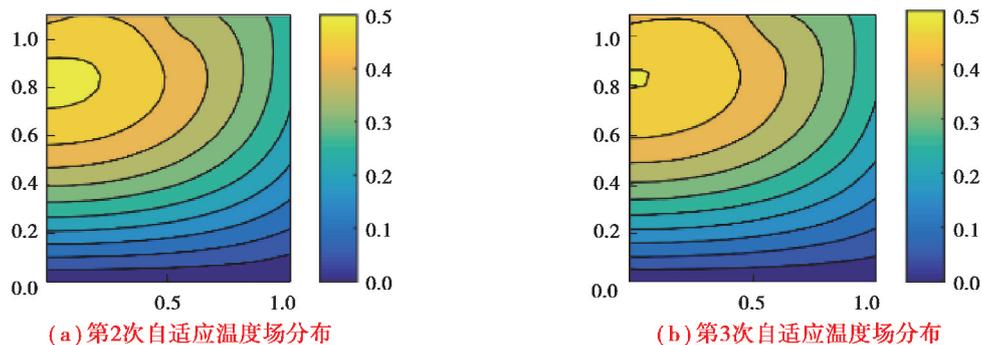


图 15 第 2、第 3 次自适应温度场分布 ( $t=1$  s)

Fig. 15 Second and third adaptive temperature field distribution  $t=1$  s

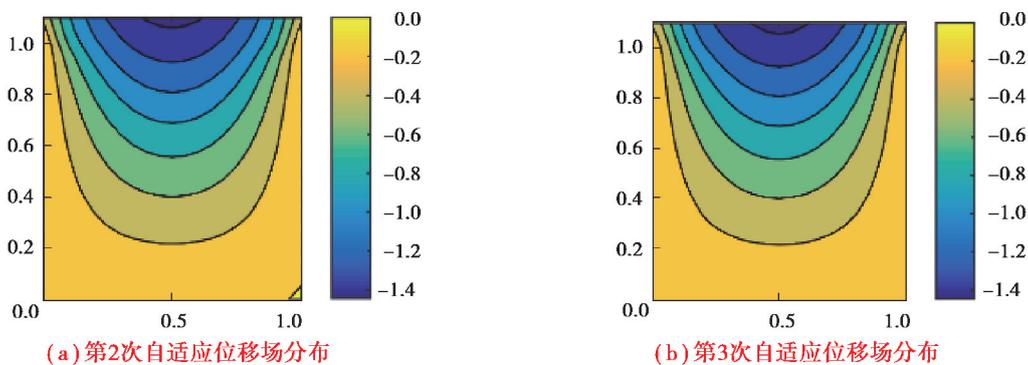


图 16 第 2、第 3 次自适应位移场分布 ( $t=1$  s)

Fig. 16 Second and third adaptive displacement field distribution  $t=1$  s

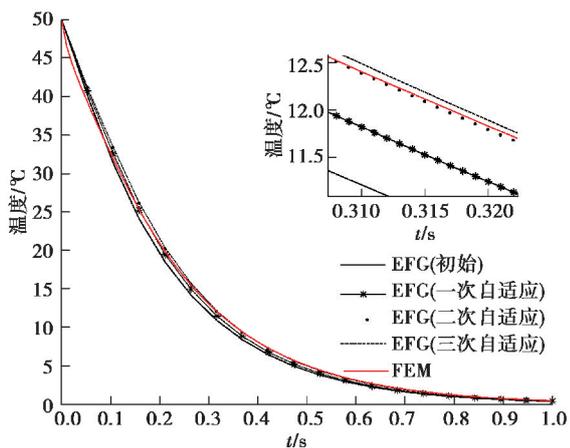


图 17 节点 11 号的时间-温度历程图

Fig. 17 Time-temperature history of node 11

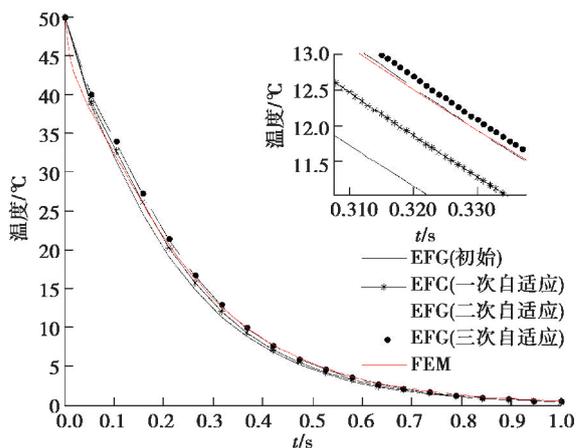


图 18 节点 15 号的时间-温度历程图

Fig. 18 Time-temperature history of node 15

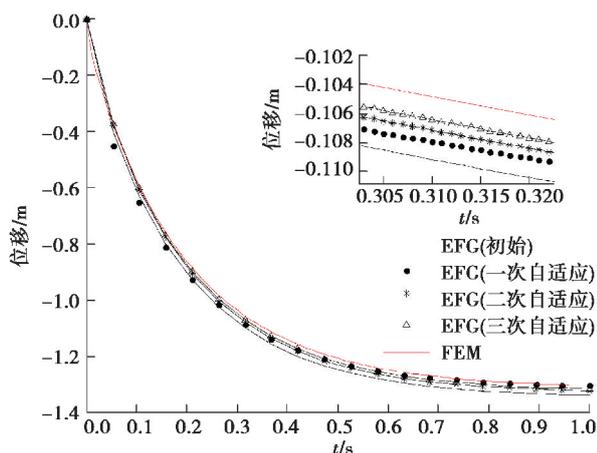


图 19 节点 11 号的时间-位移历程图

Fig. 19 Time-displacement history of node 11

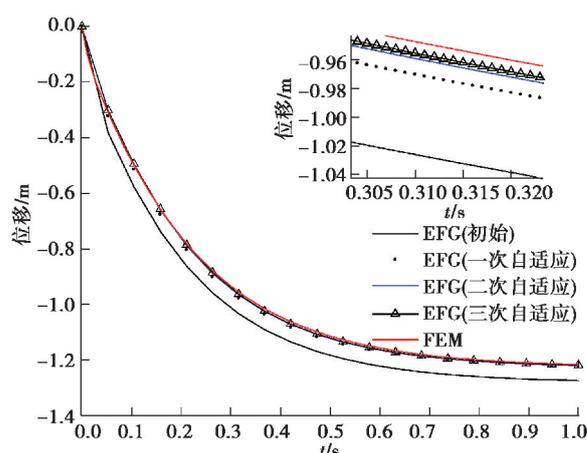


图 20 节点 15 号的时间-位移历程图

Fig. 20 Time-displacement history of node 15

## 4 结 论

采用非定常温度场拟静态热力耦合问题的 EFG 法计算模型,分别求解了光滑平板,凹凸边界平板的热力耦合问题的位移场和温度场分布,并且采用 H 型自适应对实际工程中的凹凸边界热力耦合问题进行了算法优化,研究表明:

1) 在应对光滑边界的热力耦合问题时,无网格方法的精度以及收敛速度略高于有限元方法,并且由于节点施加的便捷性,可结合有限元网格剖分软件的单元节点去替代无网格节点,在实际工程中,可优先考虑使用无网格方法对结构温度场和位移场随时间的变化进行计算,能够获得十分精确的数值解。

2) 在应对结构具有凹凸边界的热力耦合问题时,将无网格方法与 H 型自适应技术相结合,在确保边界条件顺利施加的情况下又能够合理地增加节点密度,继而保证计算精度,考虑到计算时间成本的问题,可用相同边界条件下定常温度场静态问题的自适应节点分布图去替代计算。自适应技术与无网格算法相结合,为后续无网格算法的程序化、软件化及商业化提供了十分广阔的前景。

### 参考文献:

- [1] 王洪刚. 热弹性力学概论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1989.  
Wang H G. Introduction to Thermoelasticity[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1989. (in Chinese)
- [2] 段进涛, 史旦达, 汪金辉, 等. 火灾环境下钢结构响应行为的 FDS-ABAQUS 热力耦合方法研究[J]. 工程力学, 2017, 34(2): 197-206.  
Duan J T, Shi D D, Wang J H, et al. A study of thermal-mechanical coupled method of analyzing steel structures' thermal response in fire based on fds-Abaqus[J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(2): 197-206. (in Chinese)
- [3] Mavrič B, Šarler B. Application of the RBF collocation method to transient coupled thermoelasticity[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2017, 27(5): 1064-1077.
- [4] Nowinski J L. Theory of thermoelasticity with applications [M]. New York: Sijhoff & Noordhoff International Publishers, 1978.
- [5] Boley B A, Weiner J H, Prager W. Theory of thermal stresses[J]. Journal of Applied Mechanics, 1961, 28(2): 318.
- [6] 马永斌, 何天虎. 基于分数阶热弹性理论的含有球型空腔无限大体的热冲击动态响应[J]. 工程力学, 2016, 33(7): 31-38.  
Ma Y B, He T H. Thermal shock dynamic response of an infinite body with a spherical cavity under fractional order theory of thermoelasticity[J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(7): 31-38. (in Chinese)
- [7] 谷良贤, 王一凡. 几何非线性假设下温度大范围变化瞬态热力耦合问题研究[J]. 工程力学, 2016, 33(8): 221-230.  
Gu L X, Wang Y F. The transient response of thermo-mechanical coupling with wide change in temperature based on the hypothesis of geometry nonlinearity[J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(8): 221-230. (in Chinese)
- [8] Boley B A, Tolins I S. Transient coupled thermoelastic boundary value problems in the half-space[J]. Journal of Applied

- Mechanics, 1962, 29(4): 637-646.
- [9] Biot M A. Generalized Lagrangian thermodynamics of thermorheology[J]. Journal of Thermal Stresses, 1981, 4(3/4): 293-320.
- [10] Nariboli G A. Spherically symmetric thermal shock in a medium with thermal and elastic deformations coupled[J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1961, 14(1): 75-84.
- [11] Takeuti Y, Ishida R, Tanigawa Y. On an axisymmetric coupled thermal stress problem in a finite circular cylinder[J]. Journal of Applied Mechanics, 1983, 50(1): 116-122.
- [12] Oden J T. Finite elements of nonlinear continua[M]. New York: Dover Publications, 2006.
- [13] 王林翔, R·V·N·梅尔姆克. 热弹性动力学耦合问题的微分代数方法[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(9): 1036-1046.  
Wang L X, Melnik R·V·N. Differential-algebraic approach to coupled problems of dynamic thermoelasticity[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(9): 1036-1046. (in Chinese)
- [14] Gao X W. Boundary element analysis in thermoelasticity with and without internal cells[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(7): 975-990.
- [15] 范悦宏. 无网格法在数值传热学中的应用研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2005.  
Fan Y H. A study of meshless method in numerical heat transfer[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2005. (in Chinese)
- [16] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37:229-256.
- [17] 李庆华, 陈莘莘. 二维耦合热弹性动力学问题的无网格自然邻接点 Petrov-Galerkin 法[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2019, 41(5): 109-114.  
Li Q H, Chen S S. Meshless natural neighbour Petrov-Galerkin method for two-dimensional dynamic coupled thermoelasticity problem[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2019, 41(5): 109-114. (in Chinese)
- [18] 王峰, 郑保敬, 林皋, 等. 热弹性动力学耦合问题的插值型移动最小二乘无网格法研究[J]. 工程力学, 2019, 36(4): 37-43,51.  
Wang F, Zheng B J, Lin G, et al. Meshless method based on interpolating moving least square shape functions for dynamic coupled thermoelasticity analysis[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(4): 37-43, 51. (in Chinese)
- [19] Angulo A, Pozo L P, Perazzo F. A posteriori error estimator and an adaptive technique in meshless finite points method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, 33(11): 1322-1338.
- [20] 李永永. 自适应无网格方法[D]. 苏州: 苏州大学, 2011.  
Li Y Y. Adaptive meshless method[D]. Suzhou, China: Soochow University, 2011. (in Chinese)

(编辑 张 莘)