

doi: 10.11835/j.issn.1000.582X.2023.10.002

多因素耦合下深水钢管桩偏位简化计算方法

张刚领¹, 陈永亮², 崔福刚²

(1. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045; 2. 中铁十一局集团第五工程有限公司, 重庆 400037)

摘要: 栈桥深水钢管桩属柔性、缺陷敏感结构, 而目前尚无综合考虑几何初始缺陷、施工荷载和
水流荷载耦合作用下桩顶偏位的简化计算方法, 较难考虑深水钢管桩的非线性效应从而带来安全
隐患。将水流荷载简化为倒三角分布荷载, 分别采用水面以下、以上钢管桩的弹性稳定平衡微分方
程, 在考虑几何非线性的条件下推导出钢管桩偏位理论计算公式。在此基础上, 选取不同长度钢管
桩为研究对象, 探究几何初始缺陷、几何非线性对钢管桩偏位的影响规律, 并通过理论推导对偏位
理论公式进行简化, 以便于工程实际应用。分析结果表明, 倒三角水流荷载简化模型在考虑几何非
线性时的计算结果与不考虑几何非线性时结果相差较大, 更符合柔性结构受水流荷载作用特点, 为
钢栈桥使用过程中考虑水流荷载影响及钢管桩桩顶侧移控制提供了方法支撑和切实可行的技术
手段。

关键词: 栈桥钢管桩; 几何非线性; 几何初始缺陷; 水流荷载; 简化计算方法

中图分类号: TU289

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2023)10-015-07

A simplified calculation method for deflection of deep water steel pipe pile under multi-factor coupling

ZHANG Gangling¹, CHEN Yongliang², CUI Fugang²

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China; 2. The 5th
Engineering Co., Ltd. China Railway 11th Bureau Group, Chongqing 400037, P. R. China)

Abstract: The steel pipe piles in the deep-water trestle are flexible yet highly sensitive to faults. Currently, there
lacks a simplified calculation method that comprehensively account for the pile's deflection at the top, with
considering the combined effects of geometric initial defects, construction loads, and water flow load. This
deficiency makes it challenging to address the non-linear behavior of steel pipe piles in deep water, thus posing
safety risks. To address this issue, the water flow load was simplified to an inverted triangle distribution load, and
elastic stable equilibrium differential equations for the steel pipe pile, both below and above the water surface,
were respectively adopted to derive a theoretical calculation formula for pile deflection with considering
geometric nonlinearity. Building upon this foundation, steel pipe piles of varying lengths were selected as the
research object to explore the influence of geometric initial defects and nonlinearity on pile deflection. Through
theoretical deviation, the theoretical formula was further simplified for derivation, making it more practical for

收稿日期: 2023-04-03

基金项目: 重庆市技术创新与应用发展专项(cstc2019jcsx-msxmX0313); 国家自然科学基金(52078084, 51578095)。

Supported by Chongqing Technology Innovation and Application Development Special Projects(cstc2019jcsx-
msxmX0313), and National Natural Science Foundation of China(52078084, 51578095)。

作者简介: 张刚领(1996—), 男, 硕士研究生, 主要从事结构健康监测及桥梁结构施工技术研究, (E-mail)472121668@qq.com。

engineering applications. The analysis results show that with considering geometric nonlinearity, the simplified model yields significantly different load flow calculations compared with models that neglect geometric nonlinearity. This is more in line with the flexible structure's response to water loads. Consequently, our study provides valuable support and practical technology for managing water load impacts and lateral control of steel pipe piles in steel trestle structures during their operational life.

Keywords: trestle steel pipe pile; geometric nonlinearity; geometric initial defect; water load; simplified method

为方便跨江、跨河桥梁主体结构施工作业,栈桥已成为不可缺少的临时性结构物,其多采用贝雷梁体系作为上部结构,钢管桩作为下部结构^[1-4]。近年来施工栈桥质量、安全事故频发,例如2018年新建福州至平潭铁路站前工程因栈桥的下部结构施工延期,造成大桥整体工期延长6个月;2017年益娄衡高速大桥栈桥下部结构垮塌,造成较大的经济损失。这些事故不但严重影响施工进度,更造成恶劣社会影响和巨大生命财产损失。施工栈桥是跨江桥梁施工中的主要辅助措施,而施工栈桥的关键在于下部钢管桩结构的安全性。

目前,对于桩长较小的钢管桩主要通过有限元分析整体受力情况,例如文献[5-8]结合桥位地质、水文条件,在探究钢栈桥设计思路及施工工艺的基础上,考虑栈桥自重、风荷载、流水压力及其他可变荷载等工况,对钢管桩各杆件承载力、刚度和稳定性进行验算。从受力性质角度来看,栈桥钢管桩属于典型的压杆构件,当压杆长度较长时,较多研究表明轴力将使构件对初始几何缺陷的敏感性显著增大^[9-12];同时,较为精确的二阶分析方法在考虑几何非线性后,计算所得构件内力及位移比传统一阶分析结果更大^[13-15]。因此,当钢管桩较长时,应综合考虑施工竖向荷载、水流水平向荷载、几何初始缺陷和几何非线性的耦合作用。

虽然目前可通过精细化的有限元模型计算得到耦合作用下钢管桩的内力及位移,但在实际工程中不便于广大工程人员应用,故往往采用增大安全系数的方法来保障设计安全。针对这一问题,基于弹性稳定理论,在同时考虑施工荷载、水流荷载以及几何非线性、几何初始缺陷耦合作用下,通过理论推导得出钢管桩桩顶偏位的近似计算公式,为栈桥钢管桩的偏位计算提供新方法。

1 桩顶偏位规范简化计算方法

1.1 栈桥钢管桩简化分析模型

栈桥钢管桩往往单排设置2根桩,桩底部通常嵌入基岩并浇筑混凝土;2根钢管桩之间采用横向连系连接成整体;桩顶设置横梁,在横梁上再布置贝雷梁。因此,单排钢管柱可简化为高度为 l 的单根悬臂柱。

施工荷载可视化为作用在墩顶的集中力 N 和弯矩 M 。几何初始缺陷选用沿桩高具有连续几何分布的曲线 y_0 表示,墩顶处的偏位值为 Δ 。记钢管桩顶部为 A ,底部为 C ,水流高度处为 B ,如图1所示。

对常见等截面圆形钢管桩,水流荷载可按《公路桥涵通用设计规范》(JTG D60—2015)及《铁路桥涵设计规范》(J460/TB10002—2017)规定,水深 h 处的水流速度 V 及流水压力标准值 F_w 可分别取为

$$V = V_{\max} \left(\frac{h}{H} \right)^n, \quad (1)$$

$$F_w = KA \frac{\gamma V^2}{2g}, \quad (2)$$

式中, V_{\max} 为水面上的流速, H 为总水深; n 为常数,由水流性质、河床性质等多种因素确定,通常取为1/4~1/10; γ 为水重力密度; A 为阻水面积; g 为重力加速度; K 为桥墩形状系数。

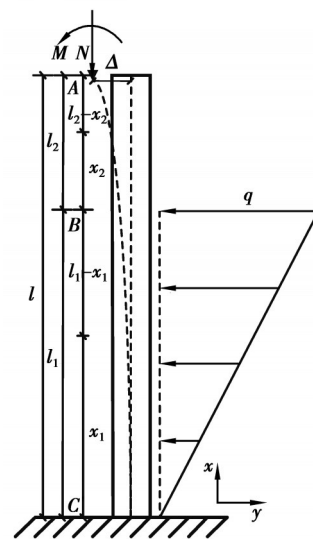


图1 水流荷载简化模型

Fig. 1 Simplified model of flow load

当 n 取 1/2 作为一般河流水流流速的分布曲线已偏于安全,同时将式(1)带入式(2)可得:

$$F_w = \frac{KA\gamma V_{\max}^2}{2Hg} h_0 \quad (3)$$

由式(3)可以看出,水流荷载沿河流垂直面线性增大,为准确计算水流荷载的作用,可将水流荷载沿钢管桩的分布简化为底部为 0、上部为 q 的倒三角形。倒三角水流荷载作用下钢管桩偏位模型以及倒三角水流荷载的计算模型沿钢管桩的分布如图 1 所示。

1.2 规范计算公式

按现行规范规定,假定水流压力的合力点在设计水位线以下 0.3 倍水深处, F 为流水压力标准值,为集中力, Δ 为桩顶偏位值,基于力法原理,可得到水流荷载及几何初始缺陷共同作用下钢管桩桩顶的偏位 w_1 为:

$$w_1 = \Delta + \frac{0.343F_w l_1^3}{3EI} + \frac{Fl_1^2}{2EI} \times (0.3l_1 + l_2) \quad (4)$$

1.3 耦合作用下桩顶偏位计算方法

为方便计算,根据水位高度将钢管桩分为上、下两部分,直接承受水流荷载的下部记为第 I 部分;其余部分记为第 II 部分,如图 1 所示。

当考虑钢管桩几何非线性时,水流荷载及钢管桩几何初始缺陷产生的侧移无法直接叠加,须同时考虑两者耦合作用。为方便计算,假设钢管桩顶部整体初始几何缺陷位移函数为:

$$y_0 = \Delta \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right] \quad (5)$$

由式(5)可得钢管桩高度为 l_1 时的钢管桩几何初始缺陷值 $y_0(l_1)$, 记为 Δ_1 。则第 I 部分和第 II 部分钢管桩的初始几何缺陷 y_{0I} 和 y_{0II} 可分别表示为:

$$\begin{cases} y_{0I} = \Delta_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l_1}\right) \right], \\ y_{0II} = \Delta \left[\cos\left(\frac{\pi l_1}{2l}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right]. \end{cases} \quad (6)$$

记整根钢管桩桩顶几何初始缺陷值与高度为 l_1 处几何初始缺陷的差值为 e , 由力平移定理可知,竖向集中力在钢管桩 l_1 高度处形成的附加弯矩 M_B 为:

$$M_B = Ne = N\Delta \cos\left(\frac{\pi l_1}{2l}\right) \quad (7)$$

取钢管桩第 I 部分的上部 $l_1 - x_1$ 节段为隔离体,建立力平衡微分方程:

$$-EI(y_1'' - y_{0I}'') + N(w_1 - y_1) + M_B + \frac{1}{3}\left(q + \frac{1}{2}\frac{q}{l_1}x\right)(l_1 - x)^2 = 0 \quad (8)$$

式中: w_1 为同时考虑钢管桩几何非线性及水流荷载下桩顶侧向位移; y_1 为 $l_1 - x_1$ 截面处侧向位移。式(8)的通解为:

$$y_1 = C_1 \cos\left(x_1 \sqrt{\frac{N}{EI}}\right) + C_2 \sin\left(x_1 \sqrt{\frac{N}{EI}}\right) - \frac{EI\Delta_1 \pi^2 \cos\left(\frac{\pi x_1}{2l_1}\right)}{\pi^2 EI - 4Nl_1^2} + w_1 + \frac{M_B}{N} + \frac{Nqx_1^2 - 2Nql_1x_1 + Nql_1^2 - 2qEI}{3N^2} + \frac{Nqx_1^3 - 2Nql_1x_1^2 + Nql_1^2x_1 - 6qElx_1 + 4qEll_1}{6N^2l_1} \quad (9)$$

式中, C_1 、 C_2 为常数。利用 $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$ 及 $y_1(l_1) = w_1$ 带入式(9)中,并令 $\gamma_1 = l_1 \sqrt{N/EI}$, $N_E = \pi^2 EI / (4l_1^2)$, $\beta = N/N_E$, $\alpha = l_1/l$, 可得第 I 部分钢管桩顶部偏位 w_1 为:

$$w_1 = \frac{\Delta_1 N_E}{N_E - \alpha^2 N} + w_B \frac{2(\sec \gamma_1 - 1)}{\gamma_1^2} + w_F \frac{4(2\gamma_1 \tan \gamma_1 - 2\sec \gamma_1 + 2 - \gamma_1^2)}{\gamma_1^4} + w_F \frac{12 \tan \gamma_1 - 2\gamma_1^2 \tan \gamma_1 - 8\gamma_1 - 4\gamma_1 \sec \gamma_1}{\gamma_1^5} \quad (10)$$

式中: $w_B = M_B l_1^2 / 2EI$, 为仅在 M_B 作用下的第 I 部分钢管桩顶部偏位; $w_F = ql_1^4 / 12EI$, 为仅在水流荷载作用下

的第I部分钢管桩顶部偏位。

为简化计算,采用三角函数简化式(10),可得:

$$w_1 \approx \frac{\Delta_1}{1-\alpha^2\beta} + \frac{1+0.03\beta}{1-\beta} w_B + \left(\frac{1-0.04\beta}{1-\beta} + \frac{1}{10} \right) w_F \quad (11)$$

对式(10)求导并带入边界条件,可得第I部分钢管桩顶部转角 θ_1 :

$$\theta_1 = y_1'(l_1) = \frac{EIA_1\pi^3/2l_1}{\pi^2 EI - 4Nl_1^2} + \theta_1' \frac{\tan \gamma_1}{\gamma_1} + w_F' \times \frac{(\gamma_1^2 + 6) \tan \gamma_1 \sin \gamma_1 - 2\gamma_1 \tan \gamma_1}{2\gamma_1^4} + \frac{(\gamma_1^2 + 2) \cos \gamma_1 - 2}{2\gamma_1^4} \quad (12)$$

采用三角函数简化式(12),可得:

$$\theta_1 = y_1'(l_1) \approx \frac{\Delta_1 \pi / 2l_1}{1-\alpha^2\beta} + w_B' + \frac{1}{8} w_F' \quad (13)$$

式中: $w_B' = M_B l_1 / EI$, $w_F' = q l_1^3 / EI$ 。

取钢管桩上部 l_2-x_2 节段为隔离体,并建立力平衡微分方程:

$$-EI(y_{II}'' - y_{0II}'') + N(w_{II} - y_{II}) + M_A = 0 \quad (14)$$

式中: w_{II} 为考虑钢管桩几何非线性及水流荷载下桩顶侧向位移; y_{II} 为 l_2-x_2 截面处侧向位移; $M_A = N \times w_1$,为第I部分钢管桩偏位引起第II部分钢管桩的横向弯矩。

与第I部分钢管桩偏位求解过程相同,通过方程求解、三角函数化简可得 w_{II} 的表达式为:

$$w_{II} \approx \frac{\Delta \cos \pi\alpha/2}{1-\beta} - \frac{\pi l_2 / (2l) \Delta \sin \pi\alpha/2}{1-\beta} + \frac{1+0.03\beta}{1-\beta} w_A \quad (15)$$

式中, $w_A = M_A l_2^2 / 2EI$ 为 M_A 作用下桩顶偏位。综合式(11)(13)和(15),同时令 $\mu = (1-\alpha)/\alpha$,可得桩顶侧移 w_2 为:

$$w_2 = w_1 + \theta_1 l_2 + w_{II} \approx \frac{\Delta_1}{1-\alpha^2\beta} \left(1 + \frac{\pi\mu}{2} \right) + \frac{\Delta}{1-\beta} \times \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi-\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) + \frac{1+0.03\beta}{1-\beta} \times (w_A + w_B) + 2\mu w_B + \left(\frac{1-0.04\beta}{1-\beta} + \frac{1}{10} + 1.5\mu \right) w_F \quad (16)$$

2 钢管桩垂直度偏位计算公式简化

通过上述分析可以发现,考虑几何非线性的钢管桩垂直度偏位计算结果较不考虑几何非线性的钢管桩垂直度偏位较大,更符合实际情况,但是倒三角水流荷载计算公式较为复杂,在实际工程中应用不太方便,因此应对多种因素作用下倒三角水流荷载的钢管桩垂直度偏位计算公式进行简化。

钢栈桥在设计时为满足施工要求,钢管桩高度要始终大于水位高度,为简化计算,取钢管桩上部不受水流荷载作用部分,即第II部分,由式(15)可得:

$$w_{II} \approx \frac{\Delta}{1-\beta} \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) + \frac{1+0.03\beta}{1-\beta} w_A \quad (17)$$

由式(17)可以看出,由几何初始缺陷引起的钢管桩顶偏位随 α 值变化而变化,因此可取 f ,如式(18)所示:

$$f = \cos \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \quad (18)$$

通常情况下,水位高度大于0.5倍钢管桩高度,因此 α 的取值范围为0.5~1,增量为0.01,可得 f 的取值如图2所示。

由图2可知, f 的取值与 α 成反比关系,当 $\alpha > 0.65$ 即水位高度与钢管桩高度之比大于0.65时, f 的取值小于0.05,同时当 $\alpha > 0.85$, f 的取值趋近于零,可忽略不计,所以为简化计算,当 $\alpha > 0.65$ 时,式(17)可简化为:

$$w_{II} \approx \frac{1+0.03\beta}{1-\beta} w_A \quad (19)$$

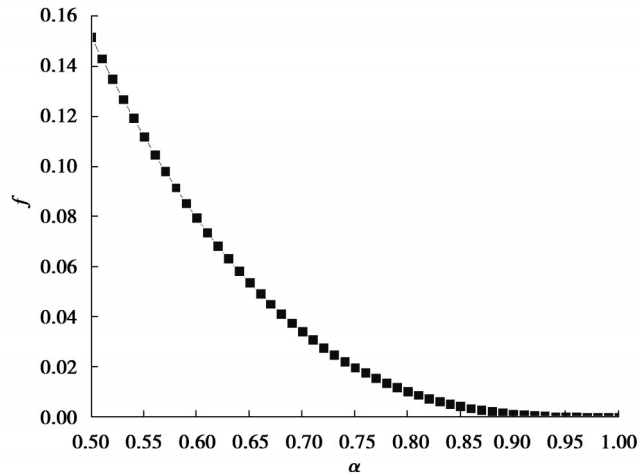


图 2 不同 α 取值下 f 值

Fig. 2 f at different values of α

根据式(19)可得,当 $\alpha > 0.65$ 时,可将式(16)简化为:

$$w_2 \approx \frac{\Delta_1}{1 - \alpha^2 \beta} \left(1 + \frac{\pi \mu}{2} \right) + \frac{1 + 0.03 \beta}{1 - \beta} \times (w_A + w_B) + 2 \mu w_B + \left(\frac{1 - 0.04 \beta}{1 - \beta} + \frac{1}{10} + 1.5 \mu \right) w_F \quad (20)$$

3 简化公式的准确性

由第 2 节可知,式(20)主要针对式(17)进行了简化,由式(17)可以看出, f 的取值只对几何初始缺陷引起的偏位有影响。为探究简化式(20)的准确性,考虑具有普适性的栈桥深水钢管桩特征参数,选取高度为 60 m 的钢管桩,水流速度取 0.5 m/s,轴压比取 0.05~0.2,增量为 0.05;设水位高度与钢管桩高度比值 α 为 0.65~0.95,增量为 0.1。钢管桩外径为 1 m,壁厚为 12 mm,采用 Q235 钢材,容重为 7 850 kN/m³,弹性模量取为 2×10^5 MPa。钢管桩在运输和插打过程中的初始缺陷根据《建筑施工临时支撑结构技术规范》取值,即考虑钢管桩初始垂直度偏差范围为 20~100 mm,增量为 20 mm。由式(17)可以看出, w_n 中几何初始缺陷引起的钢管桩顶偏位与 α 、几何初始缺陷取值以及轴压比有关,通过对比不同 α 取值及不同几何初始缺陷在不同轴压比下简化公式(20)与原公式(16)钢管桩垂直度偏位差值如图 3~4 所示。

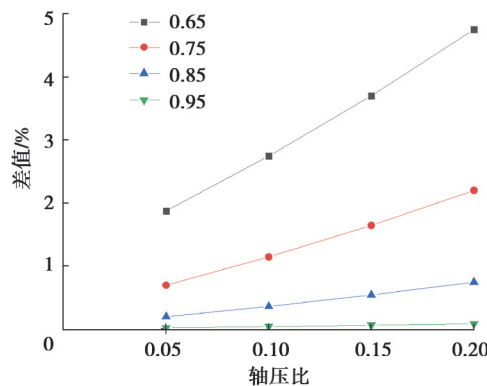


图 3 不同 α 取值下简化公式垂直度误差

Fig. 3 The error of perpendicularity of the simplified formula under different values of α

由图 3 可以看出,随着 α 取值的提高,简化公式(20)与原公式(16)垂直度偏位计算值的差值略有提高,但仍控制在 5% 以内,可以忽略不计。由图 4 可知,随着钢管桩几何初始缺陷取值的增加,简化公式(20)与原公式(16)垂直度偏位计算值的差值略有提高,但控制在 3% 以内,可以忽略不计。

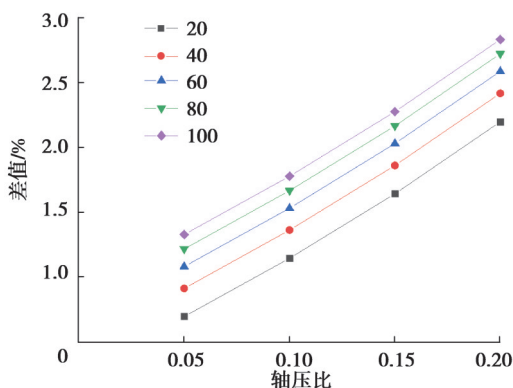


图4 不同几何初始缺陷下简化公式垂直度误差

Fig. 4 Deviation value of perpendicularity of steel pipe piles of different heights

由上述计算结果可知,简化计算公式(20)和原计算公式(16)垂直度偏位计算值差值随着轴压比提高而略有增加,但基本一致,因此,在正常施工应用中,可按照简化计算公式(20)进行钢管桩垂直度偏位值计算。

4 结 论

通过倒三角水流荷载简化模型,根据力平衡微分方程推导钢管桩在考虑几何非线性条件下垂直度偏位计算公式,并根据规范提供的方法进行优化,主要结论如下:

1)钢管桩垂直度偏位受钢管桩高度和水流荷载作用影响很大,随着钢管桩高度和水流速度的增加,钢管桩偏位呈非线性上升趋势。

2)结果表明,钢管桩受几何非线性影响显著,且随着轴压比的增加,几何非线性的影响更加明显,因此在钢管桩垂直度偏位计算时必须考虑 $P-\Delta$ 效应的影响。

3)在实际工程中,考虑几何非线性的钢管桩垂直度偏位计算公式更精确、更符合实际情况,但是倒三角水流荷载计算公式较为复杂,在实际工程中应用不太方便,因此针对多种因素作用下倒三角水流荷载的钢管桩垂直度偏位计算公式进行优化。

4)上述分析可以看出轴压比对钢管桩垂直度偏位值的影响很大,因此施工过程中,在超深水期以及三峡水库泄洪时应严格控制施工荷载以及监测钢管桩垂直度偏位的变化,降低几何非线性对钢管桩垂直度偏位值的影响程度,保障施工安全。

参考文献

- [1] 王东辉,张立超.平潭海峡公铁两用大桥栈桥设计[J].桥梁建设,2015,45(4):1-6.
Wang D H, Zhang L C. Design of trestle of Pingtan Straits rail-cum-road bridge[J]. Bridge Construction, 2015, 45(4): 1-6. (in Chinese)
- [2] 刘涛,陈允斌,刘浩.滨海软土筑岛围堰超深基坑工程实例分析[J].岩土工程学报,2012,34(S1):773-778.
Liu T, Chen Y B, Liu H. Case study of ultra-deep foundation pit by island and cofferdam construction in soft soils in coastal areas[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(S1): 773-778. (in Chinese)
- [3] Salau M A, Esezobor D E, Folorunso O M. Offshore steel structures corrosion damage model[J]. International Journal of Scientific and Engineering Research, 2013, 671(1):10-16.
- [4] Wang H, Cheng M H. Research on static and dynamic performance of large-span steel trestle[J]. Advanced Materials Research, 2013, 671/672/673/674: 1002-1006.
- [5] Wei C F, Hu S Y, Zhao B S. The research on vibration testing and analysis method of the steel truss coal trestle[J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 482: 141-144.
- [6] 董建华,庄超.深基坑框架预应力锚杆微型钢管桩联合支护结构力学特性分析[J].岩石力学与工程学报,2019,38(3):619-633.
Dong J H, Zhuang C. Mechanical properties of the combined retaining structure of frame prestressed anchors and micro steel tube piles in deep foundation pits[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, 38(3): 619-633. (in Chinese)

- [7] 贾强, 郑爱萍, 张鑫. 高承台钢管桩受压稳定性的试验研究和数值分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(6): 1736-1740.
Jia Q, Zheng A P, Zhang X. Test study and numerical analysis of stability of high-level cap steel tubular pile under compression loads[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(6): 1736-1740. (in Chinese)
- [8] 肖成志, 夏博洋, 郑刚, 等. 基础埋深对碎石桩复合地基桩体破坏模式的影响[J]. 重庆大学学报, 2019, 42(7): 63-69.
Xiao C Z, Xia B Y, Zheng G, et al. Influence of composite foundation embedded depth on the failure modes of stone columns[J]. Journal of Chongqing University, 2019, 42(7): 63-69. (in Chinese)
- [9] Liang Q Q, Patel V I, Hadi M N S. Biaxially loaded high-strength concrete-filled steel tubular slender beam-columns, Part I: Multiscale simulation[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2012, 75: 64-71.
- [10] Lee C H, Baek J H, Chang K H. Bending capacity of girth-welded circular steel tubes[J]. Journal of Constructional Steel Research, 2012, 75: 142-151.
- [11] 魏巍, 郭喜, 喻德建. 错层框架结构考虑二阶效应的设计方法[J]. 重庆大学学报, 2019, 42(11): 29-37.
Wei W, Guo X, Yu D J. The design method of staggered frame structure considering the second-order effect[J]. Journal of Chongqing University, 2019, 42(11): 29-37. (in Chinese)
- [12] 魏巍, 秦华平, 喻德建. 框架结构中越层柱考虑二阶效应的设计方法研究[J]. 建筑结构学报, 2018, 39(S2): 135-142.
Wei W, Qin H P, Yu D J. Design method of multiple-story column considering second-order effect in frame structure[J]. Journal of Building Structures, 2018, 39(S2): 135-142. (in Chinese)
- [13] 刘毅, 刘年朋, 卓子, 等. 考虑刚度折减的弹性二阶分析法在双跨排架结构中的运用[J]. 重庆大学学报, 2017, 40(9): 1-7.
Liu Y, Liu N P, Zhuo Z, et al. The application of elastic second-order method with considering stiffness reduction to two-span bent structure[J]. Journal of Chongqing University, 2017, 40(9): 1-7. (in Chinese)
- [14] 朱占友, 刘毅, 李战平, 等. 无侧移单元封闭框架二阶效应规律的解析解[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2006, 29(9): 130-133, 143.
Zhu Z Y, Liu Y, Li Z P, et al. Analytic solution of second order effects regular pattern in non-sway closed cell frame[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2006, 29(9): 130-133, 143. (in Chinese)
- [15] 许晶, 贡金鑫, 蒋秀根. 基于解析刚度模型的钢筋混凝土框架结构二阶效应分析[J]. 工程力学, 2015, 32(9): 111-118.
Xu J, Gong J X, Jiang X G. Second order effect analysis of reinforced concrete frames based on analytical stiffness model[J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(9): 111-118. (in Chinese)

(编辑 郑洁)