

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2022.102

# 轮毂电机驱动电动汽车机电耦合垂向动力学特性

李天成<sup>1a</sup>, 邓兆祥<sup>1a,1b</sup>, 张河山<sup>2</sup>, 卢泮苹<sup>1a</sup>, 曾鹏飞<sup>1a</sup>

(1. 重庆大学 a. 机械与运载工程学院; b. 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044;

2. 重庆交通大学 交通运输学院, 重庆 400074)

**摘要:** 电动车用轮毂电机受路面激励和车重的双重作用, 定转子相对偏心进而产生不平衡磁拉力, 其垂向分量与车辆悬架系统的垂向振动相耦合, 影响电动汽车的平顺性、舒适性等性能。针对这一机电耦合问题, 以一台永磁式轮毂电机为研究对象, 利用磁场叠加法获得负载气隙磁密分布, 引入复数相对磁导和偏心磁导修正系数, 建立考虑定子开槽效应的电机偏心磁场和不平衡磁拉力解析模型, 并通过有限元仿真和样机试验验证了解析模型的有效性。根据悬架系统的垂向振动与电机偏心不平衡磁拉力的实时耦合关系, 利用拉格朗日法求解车辆动力学方程, 建立 1/4 车身垂向耦合振动模型。以轮毂电机定子垂向振动加速度、车身垂向振动加速度、悬架动挠度和轮胎动载荷为主要指标, 研究机电耦合效应对车辆垂向动力学特性的影响, 揭示不平衡磁拉力输出特性与车辆动力学响应之间的机电耦合机理。研究表明, 机电耦合效应使电动汽车的平顺性、操稳性和安全性等性能总体下降。

**关键词:** 轮毂电机; 磁隙偏心; 机电耦合; 不平衡磁拉力; 垂向动力学特性

中图分类号: TM341

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2024)01-069-15

## Vertical dynamic characteristics of electromechanical coupling of in-wheel motor drive system for electric vehicle

LI Tiancheng<sup>1a</sup>, DENG Zhaoxiang<sup>1a,1b</sup>, ZHANG Heshan<sup>2</sup>, LU Panping<sup>1a</sup>, ZENG Pengfei<sup>1a</sup>

(1a. College of Mechanical and Vehicle Engineering; 1b. The State Key Laboratory of Mechanical

Transmissions, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. College of Traffic &

Transportation, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China)

**Abstract:** Due to the double action of road excitation and vehicle weight, the stator and rotor of the in-wheel motor (IWM) for electric vehicles (EVs) are relatively eccentric, thus generating an unbalanced magnetic force (UMF). When the vertical component of UMF is coupled with the vertical vibration of the suspension system of the vehicle, the ride comfort and other properties of EV are affected. To study this electromechanical coupling

收稿日期: 2021-06-18 网络出版日期: 2022-03-01

基金项目: 重庆市技术创新与应用发展重点项目 (cstc2019jscx-mbdxX0059); 重庆市自然科学基金博士后科学基金 (cstc2020jcyj-bshX0065)。

Supported by Chongqing Technology Innovation and Application Development Key Project (cstc2019jscx-mbdxX0059), and Postdoctoral Science Foundation of Natural Science Foundation of Chongqing (cstc2020jcyj-bshX0065).

作者简介: 李天成 (1997—), 男, 硕士研究生, 主要从事新能源汽车用驱动电机设计研究, (E-mail) 1454383947@qq.com。

通信作者: 邓兆祥, 男, 教授, 博士生导师, (E-mail) zxdeng@cqu.edu.cn。

problem, by taking a permanent magnet IWM as the research object, the vertical dynamic characteristics of electromechanical coupling of an IWM drive system for electric vehicle were investigated. Firstly, the air gap flux density distribution of IWM under load was obtained by superposition method of magnetic field. By introducing complex relative permeance and correction coefficient of permeance when the motor was eccentric, analytical models of the eccentric magnetic fields of IWM and UMF were obtained with the stator slotting effect taken into account, and the validity of the analytical models was verified by finite element simulation and prototype test. Then, according to the real-time coupling relationship between the vertical vibration of the suspension system and the eccentric UMF of IWM, the dynamic equation of the vehicle was solved by using the Lagrangian method, and the vertical coupling vibration model of a quarter car body was established. Finally, taking the vertical vibration acceleration of the stator of IWM, the vertical vibration acceleration of the car body, the dynamic deflection of the suspension and the dynamic load of the tire as the main indexes, the effect of electromechanical coupling on the vertical dynamic characteristics of EV was studied, and the mechanism of electromechanical coupling between the output characteristics of UMF and dynamic response of EV was revealed. The results show that the electromechanical coupling effect impairs the ride stability, operation stability and safety of EV.

**Keywords:** in-wheel motor; magnetic gap eccentricity; electromechanical coupling; unbalanced magnetic force; vertical dynamic characteristics

轮毂电机驱动系统具有高集成度、高功率密度等优势,能够优化车身结构,提高车辆的空间利用率,但也会增加整车非簧质量,使车辆平顺性变差。马英等<sup>[1]</sup>研究表明因驱动电机布置于车轮内部,簧载质量而非簧载质量之比减小,轮胎接地性能恶化。童炜等<sup>[2]</sup>应用1/4车辆动力学模型,研究轮毂电机作为非簧载质量对电动汽车垂向特性的影响。非簧质量增加带来的不良影响可采用被动或主动的方法加以抑制,如根据动力吸振器原理将轮毂电机与簧下质量弹性隔离<sup>[3]</sup>、设计主动悬架来减小轮毂电机的垂向振动负效应等<sup>[4]</sup>。

以上研究重点关注非簧质量增加对轮毂电机驱动车辆相关性能的影响,忽略了轮毂电机定转子偏心引起的机电耦合效应。在车辆实际运行中,轮毂电机驱动系统因同时受路面激励和车重的双重作用,其定转子产生相对偏心,电机偏心导致磁隙不均进而产生不平衡磁拉力,而不平衡磁拉力的垂向分量直接作用于轮胎和悬架系统<sup>[5]</sup>,形成垂向悬架系统的机械运动和电机电磁场的耦合关系,进一步影响电动汽车的垂向动力学特性。

电机磁场和电磁性能研究主要采用有限元法和解析法。有限元法能考虑电机材料的非线性,计算精度高,可求解偏心不平衡磁拉力<sup>[6]</sup>,但其计算耗时,耗资源,且仅能研究固定偏心下电机本体的电磁性能,无法分析不平衡磁拉力与车辆悬架系统垂向振动的机电耦合问题;而解析法计算耗时短、效率高<sup>[7]</sup>,且可将电机不平衡磁拉力解析模型与悬架垂向振动模型联合求解,以研究机电耦合效应对整车垂向动力学特性的影响<sup>[8]</sup>。Ma等<sup>[9]</sup>通过求解拉普拉斯方程和泊松方程得到无槽表贴式永磁电机的空载气隙磁密解析模型。Zhang等<sup>[10-11]</sup>和杜刚等<sup>[12]</sup>基于子域分析技术和多层模型法,建立了永磁电机精确磁场解析模型,考虑了定子开槽和齿磁饱和效应。任杰等<sup>[13]</sup>提出基于等效变换的计算方法,得到转子偏心时的空载气隙磁场。Chen等<sup>[14]</sup>利用麦克斯韦张量法计算永磁电机偏心不平衡磁拉力,并通过实验证明不平衡磁拉力是永磁电机振动噪声的主要来源,将上述研究推导的电机偏心不平衡磁拉力与整车系统动力学方程联立求解,用以分析机电耦合效应下的整车垂向动力学特性。Luo等<sup>[15]</sup>根据一种新型内置悬置电动轮结构,研究路面激励和电机不平衡磁拉力的双重激励对整车垂向振动特性的影响。Wang等<sup>[16]</sup>分析并阐述了开关磁阻式轮毂电机驱动电动车的机电耦合机理。Li等<sup>[17-18]</sup>研究了开关磁阻电机在电动车中的机电耦合问题,证明轮毂电机的偏心不平衡磁拉力会给整车垂向振动带来负效应。韩以伦等<sup>[19]</sup>建立1/4车辆动力学模型,以车辆平顺性指标均方根值最小为优化目标,对电机中的橡胶衬套和阻尼进行优化设计,减小了不平衡磁拉力对车辆垂向振动的负效应。以上研究尽管讨论了整车垂向振动系统和电机不平衡磁拉力间的机电耦合问题,但在基于能量法的电机磁场解析建

模中,电机定子开槽被忽略,导致不平衡磁拉力的解析精度降低;并且大多研究对整车垂向耦合振动的分析仅考虑了电动轮定转子固定偏心的情况,不符合电动汽车行驶中轮毂电机定转子实时偏心的实际情形,即忽略了不平衡磁拉力与定转子偏心距的实时耦合。

针对上述问题,笔者以课题组自主研发的外转子永磁式轮毂电机为研究对象,研究分布式驱动电动汽车机电耦合垂向动力学特性。首先基于磁场叠加法,求解轮毂电机负载气隙磁密,利用复数相对磁导和偏心磁导修正系数,得到考虑定子开槽效应的电机磁场解析模型,并利用复合 Cotes 法求解不平衡磁拉力。通过有限元仿真和样机试验对比验证了解析法的有效性。然后利用拉格朗日法求解包含不平衡磁拉力和随机路面激励的整车系统动力学方程,建立轮毂电机驱动电动汽车 1/4 车身机电耦合数学模型,包括路面激励时域模型、1/4 车身垂向振动模型。最后通过上述模型研究不同车速下机电耦合效应对轮毂电机驱动电动车垂向动力学特性(电机定子垂向振动加速度、车身垂向振动加速度、悬架动挠度和轮胎动载荷)的影响。

## 1 轮毂电机磁场解析建模

所用的外转子永磁轮毂电机的气隙磁密由永磁体磁场和电枢反应磁场 2 部分组成。为简化解析建模,提高解析模型计算效率,将永磁体结构由表面嵌入式简化为表贴式,并做以下假设:铁心磁导率为无穷大,忽略绕组的端部效应,定转子铁心和永磁体的电导率为零,永磁体材料为线性退磁特性。

### 1.1 永磁体磁场

外转子轮毂电机的永磁体分布见图 1。永磁体磁化强度  $\mathbf{M}$  可表示为径向和切向分量  $M_r$  和  $M_\theta$  的矢量和:

$$\mathbf{M} = M_r \mathbf{r} + M_\theta \boldsymbol{\theta}. \quad (1)$$

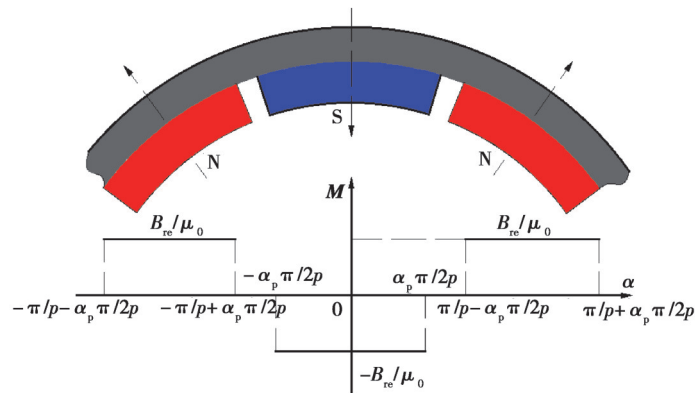


图 1 永磁体磁化强度分布

Fig. 1 Distribution of magnetization of permanent magnets

图 1 中的  $B_{re}$  为永磁体剩磁,  $\mu_0$  为真空磁导率,  $p$  为磁极对数,  $\alpha_p$  为极弧系数。根据磁化强度的周期性分布,其径向和切向分量可写成傅里叶级数形式<sup>[7]</sup>:

$$M_r = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \hat{M}_{rn} \cos(n\alpha), \quad (2)$$

$$M_\theta = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \hat{M}_{\theta n} \sin(n\alpha). \quad (3)$$

式中:  $\alpha$  为转子角度, rad;  $\hat{M}_{rn}$  和  $\hat{M}_{\theta n}$  分别为磁化强度径向和切向分量的傅里叶系数。当永磁体径向充磁时,

$$\hat{M}_{rn} = \frac{4B_{re}}{n\pi\mu_0} \sin \frac{n\pi\alpha_p}{2}, \quad (4)$$

$$\hat{M}_{\theta n} = 0. \quad (5)$$

空载气隙磁密的径向和切向分量分别为<sup>[9]</sup>

$$B_r^{\text{PM}}(\alpha, r, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{N_1} \frac{-\mu_0 \hat{M}_{rn}}{\mu_r} \frac{np}{(np)^2 - 1} \times \left\{ \frac{-(np+1) + 2\left(\frac{R_m}{R_r}\right)^{np-1} + (np-1)\left(\frac{R_m}{R_r}\right)^{2np}}{\frac{\mu_r+1}{\mu_r} \left[1 - \left(\frac{R_s}{R_r}\right)^{2np}\right] - \frac{\mu_r-1}{\mu_r} \left[\left(\frac{R_s}{R_m}\right)^{2np} - \left(\frac{R_m}{R_r}\right)^{2np}\right]} \right\} \times \left[ \left(\frac{r}{R_m}\right)^{np-1} + \left(\frac{R_s}{R_m}\right)^{np-1} \left(\frac{R_s}{r}\right)^{np+1} \right] \cos[np(\alpha - \omega_r t - \alpha_0)], \quad (6)$$

$$B_\theta^{\text{PM}}(\alpha, r, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{N_1} \frac{\mu_0 \hat{M}_{rn}}{\mu_r} \frac{np}{(np)^2 - 1} \times \left\{ \frac{-(np+1) + 2\left(\frac{R_m}{R_r}\right)^{np-1} + (np-1)\left(\frac{R_m}{R_r}\right)^{2np}}{\frac{\mu_r+1}{\mu_r} \left[1 - \left(\frac{R_s}{R_r}\right)^{2np}\right] - \frac{\mu_r-1}{\mu_r} \left[\left(\frac{R_s}{R_m}\right)^{2np} - \left(\frac{R_m}{R_r}\right)^{2np}\right]} \right\} \times \left[ \left(\frac{r}{R_m}\right)^{np-1} - \left(\frac{R_s}{R_m}\right)^{np-1} \left(\frac{R_s}{r}\right)^{np+1} \right] \sin[np(\alpha - \omega_r t - \alpha_0)]. \quad (7)$$

式中： $r$ 为所求气隙磁密处与定转子几何中心的距离，mm； $t$ 为时间，s； $\mu_r$ 为永磁体的相对磁导率； $R_m$ 为永磁体内径，mm； $R_r$ 为外转子内径，mm； $R_s$ 为定子外径，mm； $\omega_r$ 为电机转速，r/min； $\alpha_0$ 为永磁电机转子的初始位置； $N_1$ 为空载气隙磁密的最高谐波次数。

## 1.2 电枢反应磁场

电机三相绕组通电会产生一个旋转磁场，称为电枢反应磁场。该磁场在气隙内产生的磁密由A、B、C三相绕组的磁通密度矢量相加得到

$$B_r^{\text{AW}}(\alpha, r, t) = B_{r,A}^{\text{AW}} + B_{r,B}^{\text{AW}} + B_{r,C}^{\text{AW}}, \quad (8)$$

$$B_\theta^{\text{AW}}(\alpha, r, t) = B_{\theta,A}^{\text{AW}} + B_{\theta,B}^{\text{AW}} + B_{\theta,C}^{\text{AW}}. \quad (9)$$

式中： $B_{r,A}^{\text{AW}}$ 、 $B_{r,B}^{\text{AW}}$ 、 $B_{r,C}^{\text{AW}}$ 、 $B_{\theta,A}^{\text{AW}}$ 、 $B_{\theta,B}^{\text{AW}}$ 、 $B_{\theta,C}^{\text{AW}}$ 分别对应A、B、C三相绕组生成的径向和切向磁密。

以A相绕组为例，其产生的径向气隙磁密和切向气隙磁密分别为

$$B_{r,A}^{\text{AW}}(\alpha, r, t) = \sum_{m=1}^{N_2} B_{m\theta} i_A(t) \left\{ \sum_{k=1}^{N_A} S_{Ak} \cos m \left[ \alpha - \frac{2\pi}{Q_s} (\theta_{Ak} - 1) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$B_{\theta,A}^{\text{AW}}(\alpha, r, t) = \sum_{m=1}^{N_2} B_{m\theta} i_A(t) \left\{ \sum_{k=1}^{N_A} S_{Ak} \sin m \left[ \alpha - \frac{2\pi}{Q_s} (\theta_{Ak} - 1) \right] \right\}. \quad (11)$$

式中： $i_A$ 为A相电流， $i_A = I_A \sin(2\pi f_c t + \beta)$ ； $f_c$ 为电流频率，Hz； $\beta$ 为A相电流初相位，rad； $Q_s$ 为电机定子槽数； $N_2$ 为电枢反应磁场的最高谐波次数； $N_A$ 为A相绕组所占槽数； $S_{Ak}$ 为符号向量，表示每槽绕组产生的磁动势指向，如图2所示，沿定子半径方向指向外为+1，向内为-1； $\theta_{Ak}$ 为角度向量，在图2中为绕组向量所处空间位置的编号。

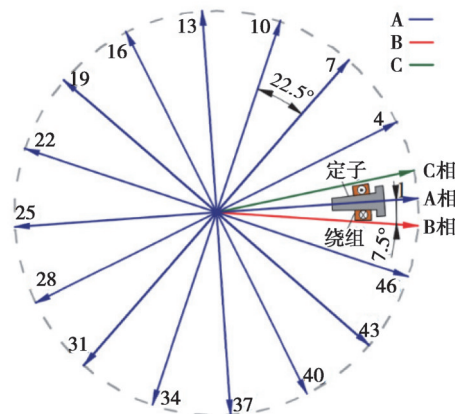


图2 永磁同步电机电枢绕组向量图

Fig. 2 Armature winding vector of permanent magnet synchronous motor

$$\mathbf{S}_{Ak} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{Ak} = [1 \ 4 \ 7 \ 10 \ 13 \ 16 \ 19 \ 22 \ 25 \ 28 \ 31 \ 34 \ 37 \ 40 \ 43 \ 46]. \quad (13)$$

式(10)和(11)中,  $B_{mr}$  和  $B_{m\theta}$  分别为  $m$  次电枢反应磁场径向和切向分量的幅值<sup>[20]</sup>:

$$B_{mr} = 4 \frac{\mu_0 R_s N_c}{\pi a b_s r} \frac{1}{m} \left( \frac{R_s}{r} \right)^m \frac{r^{2m} + R_r^{2m}}{R_s^{2m} - R_r^{2m}} \sin\left(\frac{m\alpha_y}{2}\right) \sin\left(\frac{mb_0}{2}\right), \quad (14)$$

$$B_{m\theta} = -4 \frac{\mu_0 R_s N_c}{\pi a b_s r} \frac{1}{m} \left( \frac{R_s}{r} \right)^m \frac{r^{2m} - R_r^{2m}}{R_s^{2m} - R_r^{2m}} \sin\left(\frac{m\alpha_y}{2}\right) \sin\left(\frac{mb_0}{2}\right). \quad (15)$$

式中:  $N_c$  为绕组匝数;  $a$  为绕组并联支路数;  $b_s$  为绕组槽宽度;  $\alpha_y$  为绕组节距。B、C 两相电枢反应磁场解析式推导过程类似, 不再赘述。

### 1.3 负载气隙磁场

负载气隙磁场为永磁体磁场和电枢反应磁场的线性叠加<sup>[20]</sup>, 其径向和切向分量分别为:

$$B_r(\alpha, r, t) = (B_r^{\text{PM}} + B_r^{\text{AW}}) \lambda_{\text{Re}} + (B_\theta^{\text{PM}} + B_\theta^{\text{AW}}) \lambda_{\text{Im}}, \quad (16)$$

$$B_\theta(\alpha, r, t) = (B_\theta^{\text{PM}} + B_\theta^{\text{AW}}) \lambda_{\text{Re}} - (B_r^{\text{PM}} + B_r^{\text{AW}}) \lambda_{\text{Im}}. \quad (17)$$

式中:  $\lambda_{\text{Re}}$  和  $\lambda_{\text{Im}}$  分别为复数相对磁导  $\lambda$  的实部和虚部;  $\lambda$  为考虑定子开槽效应而引入, 为了提高复数相对磁导的计算效率, 将定子槽简化为无限槽深, 再通过保形映射求解<sup>[20]</sup>:

$$\lambda(\alpha) = \lambda_{\text{Re}}(\alpha) + j\lambda_{\text{Im}}(\alpha). \quad (18)$$

$\lambda_{\text{Re}}$  和  $\lambda_{\text{Im}}$  可分解为式(19)和(20)所示的傅里叶级数形式, 其具体空间分布如图 3 所示。

$$\lambda_{\text{Re}}(\alpha) = \lambda_0 + \sum_{\eta=1}^{N_3} \lambda_{\text{Re}\eta} \cos(\eta Q_s \alpha), \quad (19)$$

$$\lambda_{\text{Im}}(\alpha) = \sum_{\eta=1}^{N_3} \lambda_{\text{Im}\eta} \sin(\eta Q_s \alpha). \quad (20)$$

式中,  $N_3$  为负载气隙磁场谐波分量的最大次数。

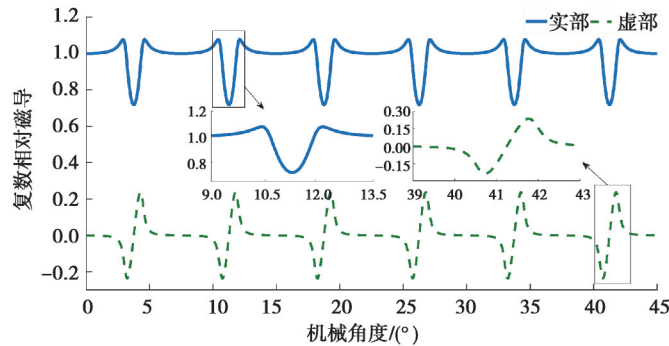


图 3 复数相对磁导的空间分布

Fig. 3 Spatial distribution of complex relative permeability

### 1.4 偏心不平衡磁拉力解析模型

轮毂电机驱动电动汽车在实际行驶过程中, 驱动电机因车重、轴承磨损以及路面激励等原因, 会出现定转子偏心(2个圆心不同心)的情况, 如图 4 所示。定转子偏心引起电机内各圆周位置的气隙长度发生变化, 进而影响气隙磁导, 改变气隙磁密的分布。因此, 引入偏心时气隙磁导的修正系数  $\varepsilon_s$ :

$$\varepsilon_s(\alpha) = \frac{g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}} - e \cos \alpha} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos \alpha} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q \cos(q\alpha); \quad (21)$$

$$\varepsilon_q = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, & q = 0; \\ \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^q, & q = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (22)$$



式中： $\varepsilon$ 为偏心率， $\varepsilon=e/g_{\text{eff}}$ ； $e$ 为偏心距，mm； $g_{\text{eff}}$ 为有效气隙长度，mm； $g_{\text{eff}}=g+w_m/\mu_r$ ； $g$ 为电机无偏心时永磁体与定子间的气隙长度，mm； $w_m$ 为永磁体厚度，mm。

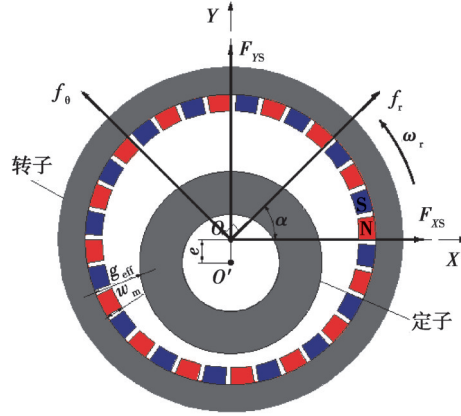


图4 永磁式轮毂电机偏心示意图

Fig. 4 Eccentricity schematic diagram of permanent magnet hub motor

电机定转子偏心引起气隙磁导改变，因此偏心负载磁场的求解需在电机无偏心气隙磁密的基础上乘以随转子角度变化的磁导修正系数。结合式(16)和(17)，永磁式轮毂电机定转子偏心时负载气隙磁密的径向和切向分量分别为：

$$B_{rs}(a, r, t, e) = B_r \times \varepsilon_s = \left[ (B_r^{\text{PM}} + B_r^{\text{AW}}) \lambda_{Rc} + (B_0^{\text{PM}} + B_0^{\text{AW}}) \lambda_{lm} \right] \times \varepsilon_s; \quad (23)$$

$$B_{\theta s}(a, r, t, e) = B_\theta \times \varepsilon_s = \left[ (B_0^{\text{PM}} + B_0^{\text{AW}}) \lambda_{Rc} - (B_r^{\text{PM}} + B_r^{\text{AW}}) \lambda_{lm} \right] \times \varepsilon_s. \quad (24)$$

如图4所示，基于麦克斯韦张量法，利用气隙磁密计算电机偏心时 $X$ 和 $Y$ 方向产生的不平衡磁拉力，见式(25)和(26)。式中积分采用复合Cotes法求解，将积分区间 $[0, 2\pi]$ 划分为 $K_n$ 等份，区间步长 $h=2\pi/K_n$ ；各区间再等分为4个区域，各区间节点 $\alpha_l=lh$  ( $l=1, 2, 3, \dots, K_n$ )， $\alpha_{l+d}=\alpha_l+dh$  ( $d \in [0, 1]$ )，本研究中 $K_n=700$ 。

$$\begin{aligned} F_{XS} &= Lr \int_0^{2\pi} (f_r \cos \alpha - f_\theta \sin \alpha) d\alpha \approx \frac{Lr_1 h}{90} \left\{ 7 [f_r(\alpha_0) \cos \alpha_0 - f_\theta(\alpha_0) \sin \alpha_0] + \right. \\ &32 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{l+0.25}) \cos \alpha_{l+0.25} - f_\theta(\alpha_{l+0.25}) \sin \alpha_{l+0.25}] + 12 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{l+0.5}) \cos \alpha_{l+0.5} - f_\theta(\alpha_{l+0.5}) \sin \alpha_{l+0.5}] + \\ &32 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{l+0.75}) \cos \alpha_{l+0.75} - f_\theta(\alpha_{l+0.75}) \sin \alpha_{l+0.75}] + 14 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_l) \cos \alpha_l - f_\theta(\alpha_l) \sin \alpha_l] + \\ &\left. 7 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{K_n}) \cos \alpha_{K_n} - f_\theta(\alpha_{K_n}) \sin \alpha_{K_n}] \right\}, \quad (25) \\ F_{YS} &= Lr \int_0^{2\pi} (f_r \sin \alpha + f_\theta \cos \alpha) d\alpha \approx \frac{Lr_1 h}{90} \left\{ 7 [f_r(\alpha_0) \sin \alpha_0 + f_\theta(\alpha_0) \cos \alpha_0] + \right. \\ &32 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{l+0.25}) \sin \alpha_{l+0.25} + f_\theta(\alpha_{l+0.25}) \cos \alpha_{l+0.25}] + 12 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{l+0.5}) \sin \alpha_{l+0.5} + f_\theta(\alpha_{l+0.5}) \cos \alpha_{l+0.5}] + \\ &32 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{l+0.75}) \sin \alpha_{l+0.75} + f_\theta(\alpha_{l+0.75}) \cos \alpha_{l+0.75}] + 14 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_l) \sin \alpha_l + f_\theta(\alpha_l) \cos \alpha_l] + \\ &\left. 7 \sum_{l=0}^{K_n} [f_r(\alpha_{K_n}) \sin \alpha_{K_n} + f_\theta(\alpha_{K_n}) \cos \alpha_{K_n}] \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

式中： $L$ 为定转子铁心的轴向有效长度，mm； $r_1$ 为积分处半径，mm。其中电磁激振力密度的径向和切向分量分别为

$$f_r(a, r, t, e) = \frac{B_{rs}^2(a, r, t, e) - B_{\theta s}^2(a, r, t, e)}{2\mu_0}, \quad (27)$$

$$f_0(\alpha, r, t, e) = \frac{B_{rs}(\alpha, r, t, e) \times B_{0s}(\alpha, r, t, e)}{\mu_0} \quad (28)$$

同样,采用复合 Cotes法可求解偏心时永磁式轮毂电机的电磁转矩表达式如下:

$$T_{\text{cms}} = \frac{Lr^2}{\mu_0} \int_0^{2\pi} (B_{rs}(\alpha, r, t, e) B_{0s}(\alpha, r, t, e)) d\alpha \approx \frac{Lr^2}{\mu_0} \left\{ \frac{h_t}{90} [7B_{rs}(\alpha_0) B_{0s}(\alpha_0) + 32 \sum_{l=0}^{K_n} B_{rs}(\alpha_{l+0.25}) B_{0s}(\alpha_{l+0.25}) + 12 \sum_{l=0}^{K_n} B_{rs}(\alpha_{l+0.5}) B_{0s}(\alpha_{l+0.5}) + 32 \sum_{l=0}^{K_n} B_{rs}(\alpha_{l+0.75}) B_{0s}(\alpha_{l+0.75}) + 14 \sum_{l=0}^{K_n} B_{rs}(\alpha_l) B_{0s}(\alpha_l) + 7 \sum_{l=0}^{K_n} B_{rs}(\alpha_{K_n}) B_{0s}(\alpha_{K_n})] \right\} \quad (29)$$

式中,  $h_t = 2\pi/K_n$ 。

## 2 解析计算与验证

本研究中的外转子永磁式轮毂电机的额定功率为 10 kW,额定扭矩 160 N·m,额定转速为 600 r/min,其主要电磁参数如表 1 所示。采用 MATLAB 软件建立轮毂电机磁场和电磁性能的解析模型,并用 ANSYS/Maxwell 软件根据样机结构参数建立轮毂电机有限元模型来验证解析法的有效性。

表 1 样机主要参数

Table.1 Main parameters of prototype

参数	符号	数值	参数	符号	数值
定子槽数	$Q_s$	48	定子外径/mm	$R_s$	142.3
转子极对数	$p$	16	永磁体处半径/mm	$R_m$	143.5
定子齿距/(°)	$b_s$	3.75	转子内径/mm	$R_r$	149.5
定子槽开口/(°)	$b_0$	1.369	气隙宽度/mm	$g$	1.2
永磁体剩磁/T	$B_{rc}$	1.2	单相匝数	$N_c$	224
相对磁导率	$\mu_r$	1.05	极弧系数	$\alpha_p$	0.7
真空磁导率/(H·m <sup>-1</sup> )	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	绕组节距	$\alpha_y$	$2\pi/Q_s$
永磁体厚度/mm	$w_m$	6	铁心长度/mm	$L$	40

图 5 为有限元仿真得到的额定工况下轮毂电机的磁感应强度  $B$  和矢量磁位  $A$  的分布云图。

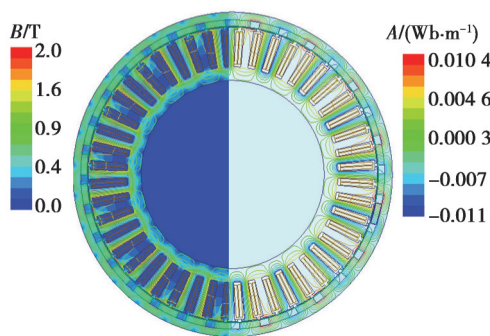


图 5 轮毂电机磁场有限元云图

Fig. 5 Finite element simulation cloud image of hub motor magnetic field

计算电机偏心率  $e=20\%$  时额定工况下解析模型和有限元模型的气隙磁密,结果如图 6 所示。图中气隙磁密的解析值和有限元吻合较好。对比左右两图可知电机偏心造成气隙减小处磁阻减小,磁密增大;气隙增大处磁阻增大,磁密减小。根据式(29)求解额定工况下电机电磁转矩的解析解,并与有限元仿真结果对比,见图 7。图中 2 条转矩曲线的趋势和波动范围都吻合较好,验证了解析模型的正确性。

图 8 为原理样机和搭建的轮毂电机试验台架。利用台架测试样机的转矩特性,图 9 为解析法和试验测试

得到的轮毂电机转矩/功率-转速特性曲线。结果表明:解析预测结果与实测结果吻合较好,但也存在一定的误差,解析计算结果略高于试验测试值,其误差主要来源于解析法对电机模型的简化以及试验仪器的机械磨损和测量精度等,总体误差在合理范围内,且解析计算曲线与实测曲线在幅值和趋势上基本符合。通过此试验进一步验证了解析模型的有效性。

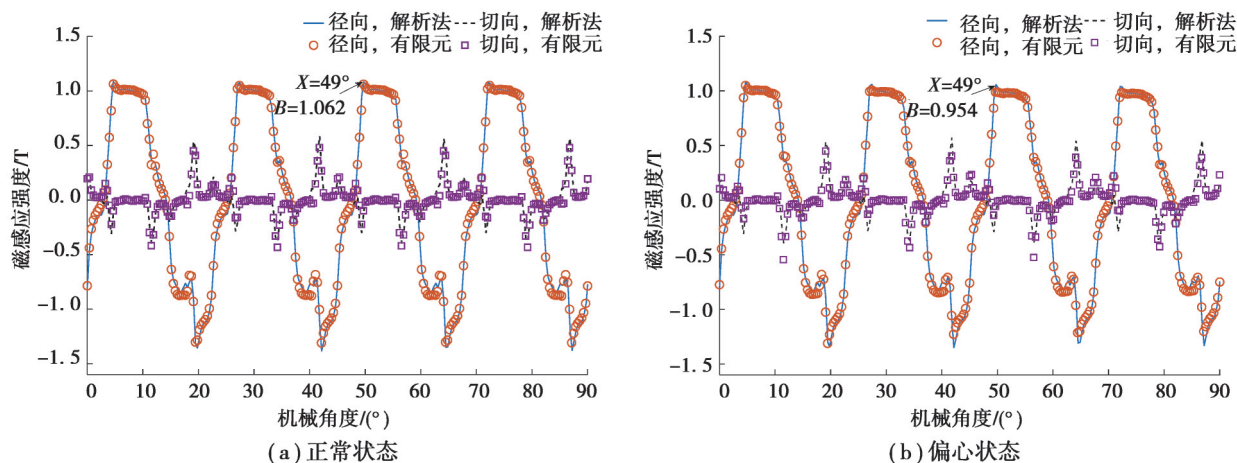


图6 考虑开槽效应的气隙磁密对比

Fig. 6 Air gap flux density considering slotting effect

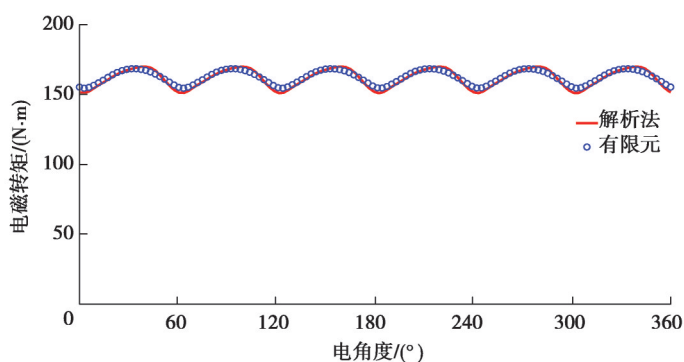


图7 输出转矩对比图

Fig. 7 Output torque contrast

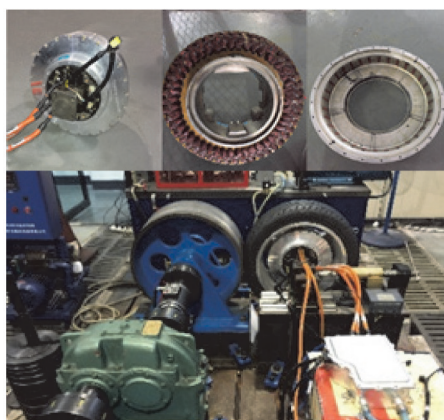


图8 轮毂电机样机和试验台架

Fig. 8 Hub motor prototype and test bench



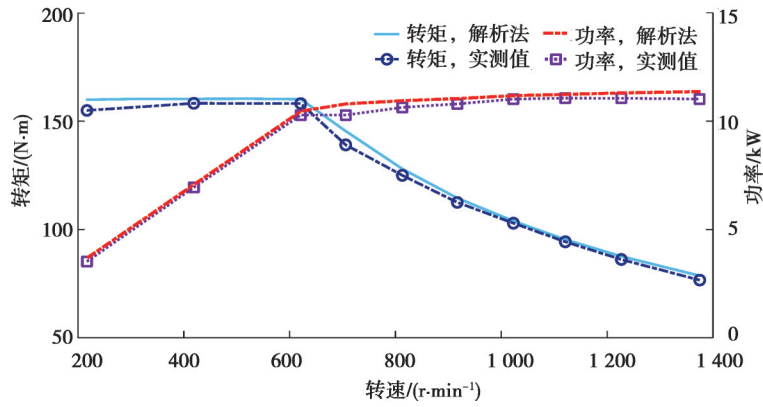


图 9 电机转矩/功率与转速特性曲线

Fig. 9 Motor torque/power-speed characteristics

### 3 机电耦合模型

#### 3.1 1/4 车身垂向振动模型

轮毂电机驱动电动车在行驶过程中,路面不平度激励造成电机定转子产生相对偏心,进而产生不平衡磁拉力,不平衡磁拉力的垂向分量直接作用于车轮和悬架系统,形成车辆悬架系统和电机不平衡磁拉力的耦合关系。图 10 为车辆机电耦合关系的原理简图和 1/4 车身机电耦合模型,模型假设车身整体为刚体,轮胎刚度、悬架刚度、悬架阻尼和轮毂电机定转子之间的滚动轴承刚度都是线性的。

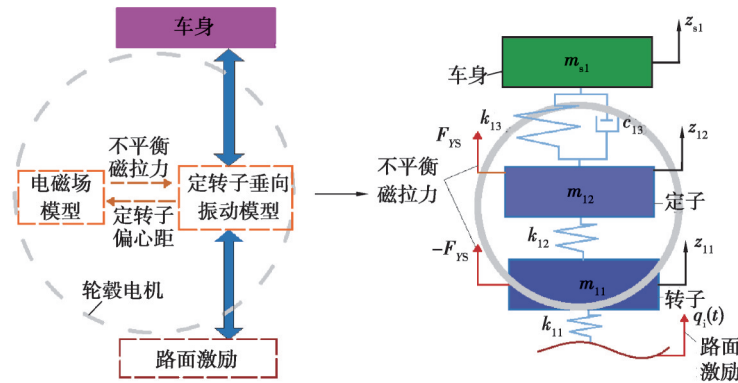


图 10 电动车机电耦合简图

Fig. 10 Electromechanical coupling schematic diagram of electric vehicle

图中,  $m_{s1}$  为车身质量,  $m_{11}$  为轮胎及外转子质量;  $m_{12}$  为电机定子及其支撑轴质量;  $k_{11}$  为轮胎刚度;  $k_{12}$  为电机轴承支撑刚度;  $k_{13}$  为悬架刚度;  $c_{13}$  为悬架阻尼;  $z_{11}$  为电机转子垂向位移;  $z_{12}$  为电机定子垂向位移;  $z_{s1}$  为车身垂向位移;  $q_i(t)$  为车轮受到的路面激励;  $F_{YS}$  为轮毂电机垂向不平衡磁拉力。1/4 车身结构参数见表 2。

利用拉格朗日法求解系统动力学方程(30),整理得到 1/4 车身垂向耦合振动的数学模型式(31):

$$\begin{cases} m_{s1} \ddot{z}_{s1} + k_{13}(z_{s1} - z_{12}) + c_{13}(\dot{z}_{s1} - \dot{z}_{12}) = 0, \\ m_{11} \ddot{z}_{11} + k_{12}(z_{11} - z_{12}) + k_{11}z_{11} = k_{11}q - F_{YS}, \\ m_{12} \ddot{z}_{12} + k_{12}(z_{12} - z_{11}) + k_{13}(z_{12} - z_{s1}) + c_{13}(\dot{z}_{12} - \dot{z}_{s1}) = F_{YS}; \end{cases} \quad (30)$$

$$M\ddot{Z} + C\dot{Z} + KZ = K_1Q + K_YF_{YS} \quad (31)$$

式中:  $Z$  为位移矩阵;  $Q$  为路面激励矩阵;  $M$  为系统质量矩阵;  $C$  为阻尼矩阵;  $K$  为刚度矩阵;  $K_1$  为路面激励的系数矩阵;  $K_Y$  为垂向不平衡磁拉力的系数矩阵;  $F_{YS}$  为不平衡磁拉力矩阵。各个系数矩阵皆由式(30)推导得到。

车辆悬架动挠度和轮胎动载荷的计算见式(32)和(33):

$$f_{df} = z_{fl} - z_{s1}, \quad (32)$$

$$F_{df} = m_{fl} \ddot{z}_{fl} - k_{13}(z_{s1} - z_{fl}) - c_{13}(\dot{z}_{s1} - \dot{z}_{fl}). \quad (33)$$

式中:  $f_{df}$  为悬架动挠度;  $F_{df}$  为轮胎动载荷;  $z_{fl}$  为轮毂电机与轮胎的垂向位移,  $z_{fl} = z_{11} - z_{12}$ ;  $m_{fl}$  为轮毂电机与轮胎的总质量,  $m_{fl} = m_{11} + m_{12}$ 。

表2 1/4车身车辆参数

Table 2 Parameters of the one-quarter-body vehicle model

参数	符号	数值	单位
1/4车辆悬挂质量	$m_{s1}$	287.5	kg
轮毂电机转子与轮胎的质量和	$m_{11}$	40	kg
轮毂电机定子及轴与附件的质量和	$m_{12}$	20	kg
轮胎刚度	$k_{11}$	210	kN/m
轮毂电机轴承刚度	$k_{12}$	4 000	kN/m
悬架刚度	$k_{13}$	20	kN/m
悬架阻尼	$c_{13}$	1 100	N·s/m

将式(31)转变为系统无阻尼自由振动方程:

$$M\ddot{Z} + KZ = 0. \quad (34)$$

求解其特征值和特征向量,得到电动汽车1/4车身垂向振动的固有特性,结果见表3。

表3 1/4车身垂向振动系统固有频率

Table 3 Natural frequency of vertical vibration system of the one-quarter-body model

阶数	固有频率值/Hz
第1阶	1.264 5
第2阶	9.844 7
第3阶	87.525 1

### 3.2 随机路面激励

路面激励是电动车行驶过程中必须考虑的外界激励源,式(35)为电动车行驶中轮胎接触的路面不平度时域表达式<sup>[21]</sup>。

$$\dot{q}(t) = -2\pi n_{00} v q(t) + 2\pi n_{00} \sqrt{G_q(n_0) \cdot v} W(t). \quad (35)$$

式中:  $n_{00}$  为路面空间截止频率,  $n_{00} = 0.011 \text{ m}^{-1}$ ;  $n_0$  为参考空间频率;  $G_q(n_0)$  为路面不平度系数;  $W(t)$  为随机白噪声;  $v$  为参考车速。

式(35)中路面不平度系数  $G_q(n_0)$  的具体数值见表4。

表4 路面不平度系数( $n_0$ 取值为  $0.1 \text{ m}^{-1}$ )<sup>[22]</sup>Table 4 Road roughness coefficient for  $n_0$  at  $0.1 \text{ m}^{-1}$  <sup>[22]</sup>

道路等级	$G_q(n_0)/\text{cm}^3$		
	下限	几何平均值	上限
A	8	16	32
B	32	64	128
C	128	256	512

利用式(35)推导随机路面激励时域模型,计算电动汽车在B级路面上( $G_q(n_0) = 32 \text{ cm}^3$ )以额定车速( $v = 65 \text{ km/h}$ )行驶时车轮所受的路面不平度激励,结果如图11所示。

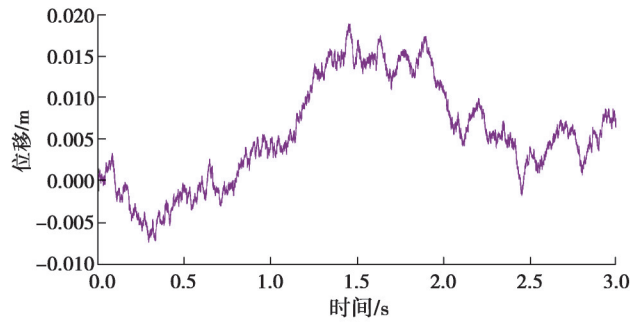


图 11 路面激励时域曲线

Fig. 11 Time domain curve of road excitation

#### 4 车辆垂向动力学特性分析

现有的机电耦合研究中,常将定转子偏心距设为固定值,而实际路面行驶中轮毂电机定转子偏心距受路面激励处于实时变化的状态。本研究中所建机电耦合模型在研究车辆的垂向动力学特性时考虑了定转子偏心的实时变化。以未考虑机电耦合效应(即忽略实际工况中轮毂电机的定转子偏心,只考虑路面激励)的垂向动力学特性为参照,研究轮毂电机定子垂向振动加速度、车身垂向振动加速度、悬架动挠度和轮胎动载荷在机电耦合效应下的变化。

以左前轮为例,图 12 为电动汽车在 B 级路面上以 8.9 km/h 行驶,轮毂电机定转子偏心距因车身自重和路面激励而产生的实时变化曲线。图 13(a)为此过程中电机偏心不平衡磁拉力在偏心距不断变化下的时域曲线,图 13(b)中可以看出不平衡磁拉力的频率分量主要为电流基频  $f$ (车速为 8.9 km/h 时,  $f=21.88$  Hz) 的偶数倍( $2f$ 等)。

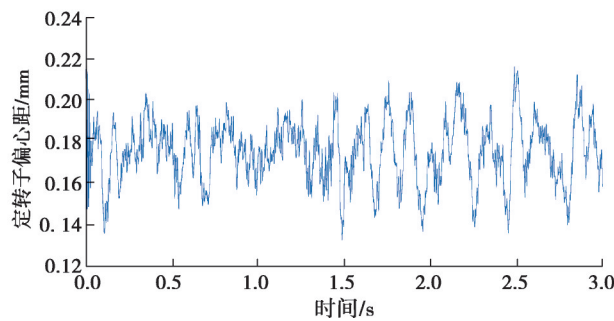


图 12 轮毂电机定转子偏心距实时变化曲线

Fig. 12 Real-time variation curve of hub motor eccentricity

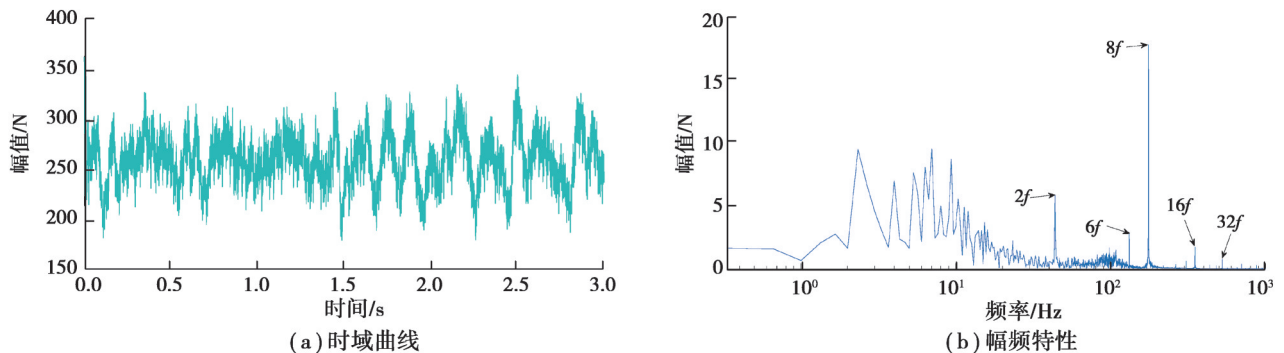


图 13 轮毂电机偏心不平衡磁拉力曲线

Fig. 13 Eccentric UMF curve of hub motor

图14为上述过程中轮毂电机定子垂向振动加速度的时域/频域特性。根据图14(a)的时域数据计算可知,不考虑机电耦合效应的轮毂电机定子垂向振动加速度的均方根值为 $1.366\text{ m/s}^2$ ,考虑机电耦合效应后其值为 $1.750\text{ m/s}^2$ ,增加了28.12%。电机定子受不平衡磁拉力的作用,垂向振动加剧。图14(b)的频谱对比表明定子振动加速度的增量主要源于其高频分量( $6f$ 、 $8f$ 等)幅值增加,结合图13可知幅值增加的高频分量是由偏心不平衡磁拉力激励引起的。

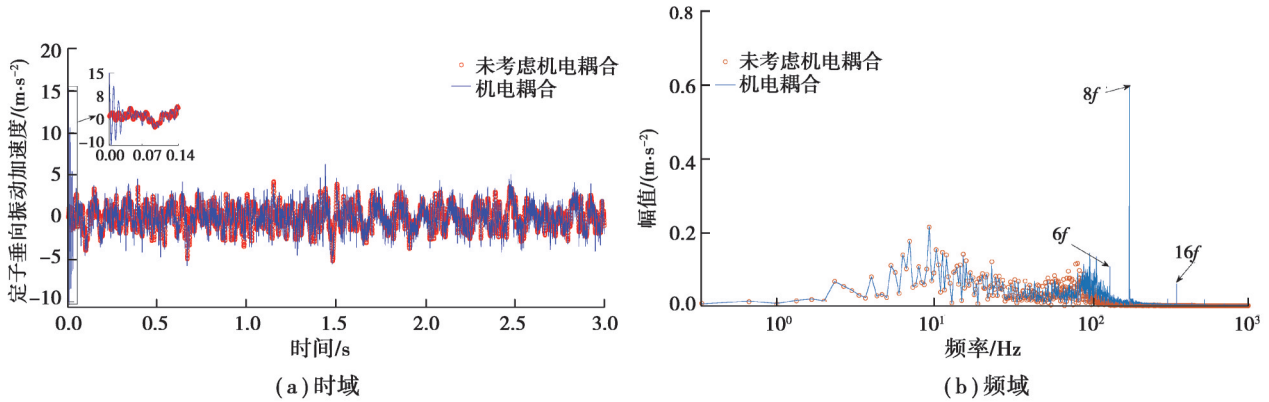


图14 轮毂电机定子振动加速度时域/频域曲线

Fig. 14 Time/frequency domain curve of stator vertical vibration acceleration of hub motor

图15为轮毂电机驱动电动汽车车身垂向振动加速度的时域/频域曲线。由图15(a)的数据求解车身垂向振动加速度的均方根值,考虑电机定转子偏心后,均方根值由 $0.2527\text{ m/s}^2$ 增加到 $0.2535\text{ m/s}^2$ ,增大了0.32%。图15(b)的频谱表明因偏心不平衡磁拉力作用,车身垂向振动加速度在 $8f$ 频率处出现峰值。但因车身悬架的缓冲阻隔,机电耦合效应对车身垂向振动加速度的影响很小。

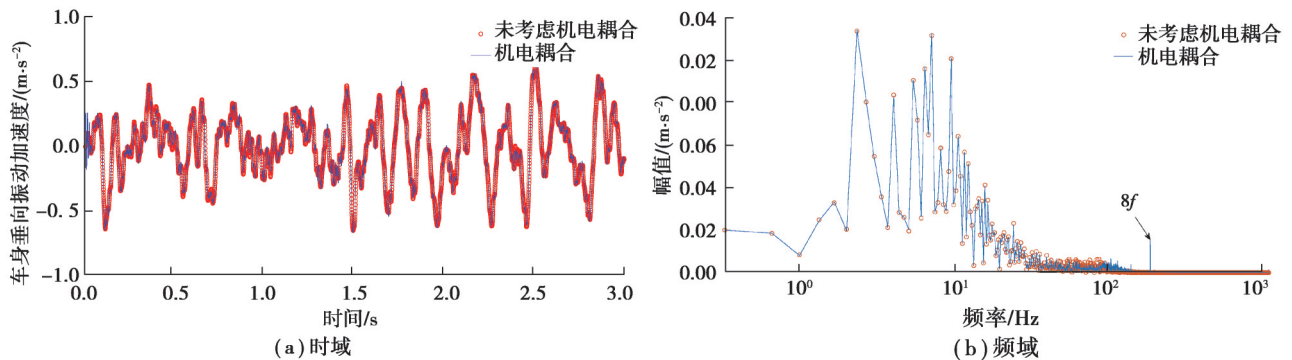


图15 车身垂向振动加速度曲线对比图

Fig. 15 Vertical vibration acceleration curves of the car body

图16为悬架动挠度的时域/频域图。对比图中数据可知,机电耦合效应使车辆悬架动挠度的幅值从0.0055增加到0.0056,增加了1.82%,但整体数值小,与电机定子垂向振动相比,机电耦合效应对悬架动挠度的影响较小。

图17为车轮轮胎动载荷时域/频域曲线。从图17(a)的数据可知,车辆行驶途中轮毂电机定转子偏心引起的机电耦合效应导致轮胎动载荷的均方根值由 $148.682\text{ N}$ 增加到 $180.824\text{ N}$ ,增加了21.62%。图17(b)的频谱图表明,考虑机电耦合效应后,轮胎动载荷在 $8f$ 等处的分量幅值明显增大。其外在表现为轮胎动载荷增大,轮胎抓地力减弱,导致电动汽车操稳性变差,安全性降低。

图18为电动汽车在不同行驶车速下机电耦合效应对车辆垂向动力学特性指标的影响。从柱状图对比可知,机电耦合效应对车辆垂向动力学特性存在负效应,且在车辆低速时影响更大,随车速增加影响减小。其中车速为 $8.9\text{ km/h}$ 时影响较大是因为在此工况下不平衡磁拉力 $2f$ ( $43.76\text{ Hz}$ )处的频率分量与转子及轮胎部分偏频(即该部分单独振动时的部分频率,此处为 $48.63\text{ Hz}$ )接近, $24f$ ( $525.3\text{ Hz}$ )处的频率分量与整车第3阶固有频率( $549.9\text{ Hz}$ )接近。总的来说,机电耦合效应对电机定子垂向振动加速度和轮胎动载荷的影响更

明显,其主要原因是由于机电耦合效应引起  $8f$  等处的高频分量幅值增大;机电耦合效应对悬架动挠度影响较小;又因车身悬架的阻隔作用,机电耦合效应对车身垂向振动加速度几乎无影响。

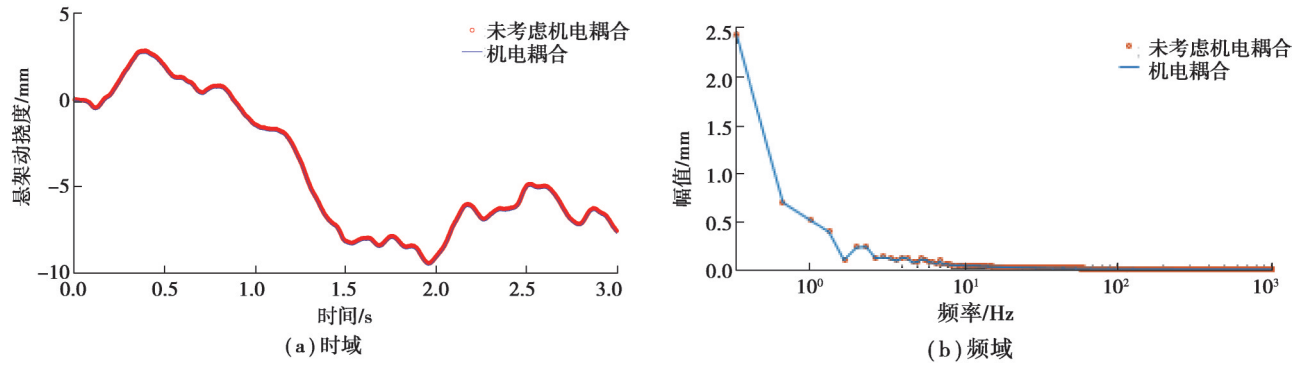


图 16 悬架动挠度时域/频域曲线

Fig. 16 Time/frequency domain curve of suspension dynamic deflection

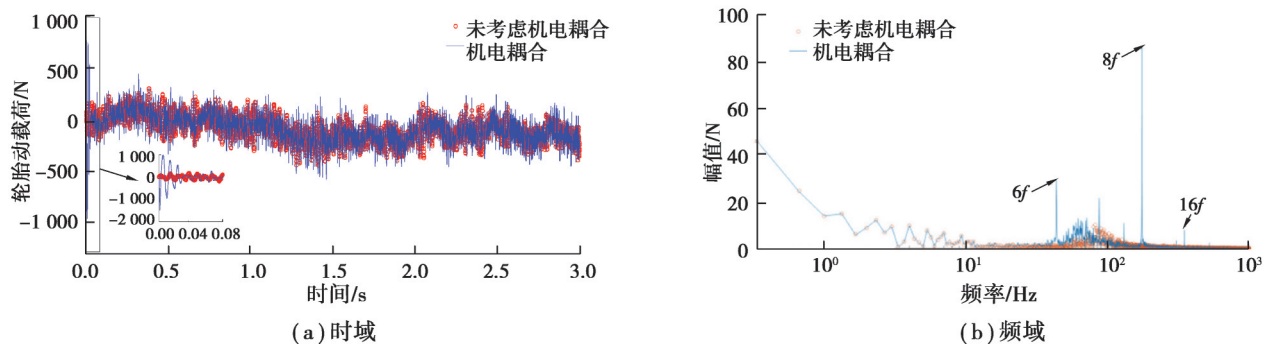


图 17 轮胎动载荷时域/频域曲线

Fig. 17 Time/frequency domain curve of tire dynamic load

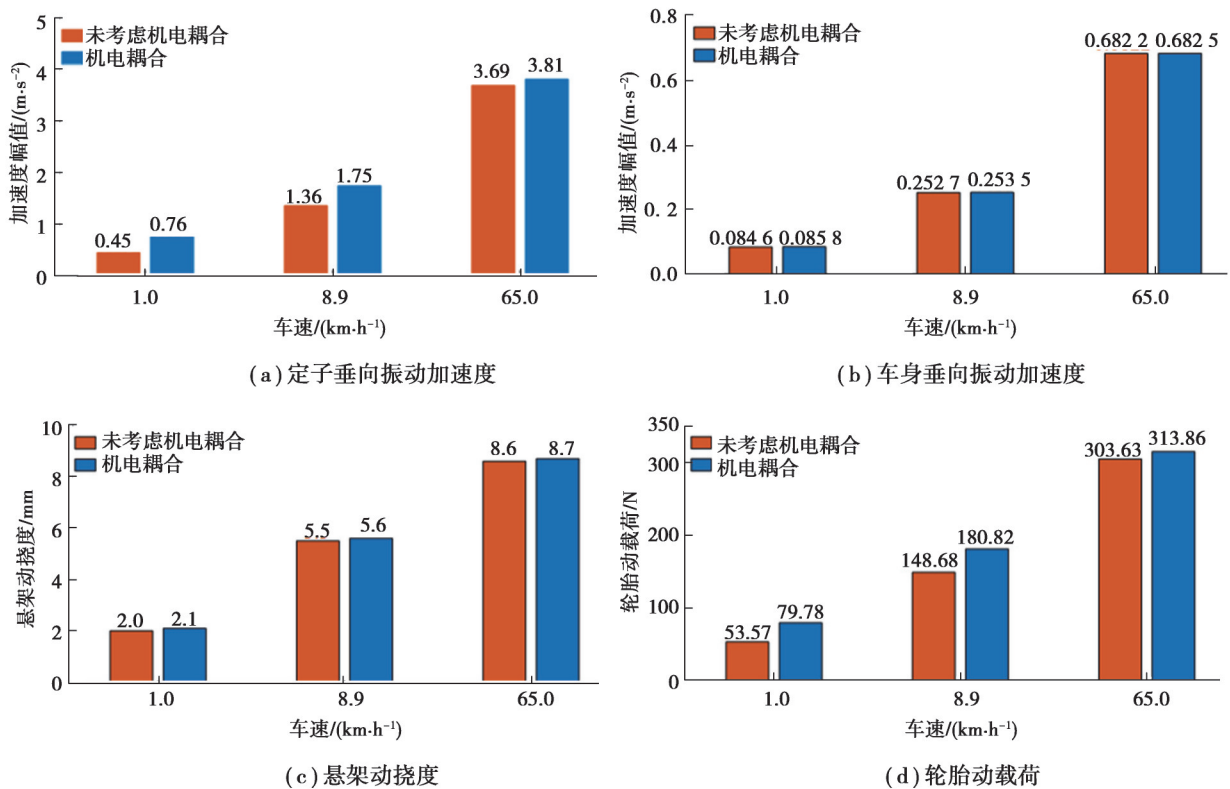


图 18 不同车速下垂向动力学特性指标变化对比

Fig. 18 Variation of vertical dynamic characteristics at different speeds



## 5 结 论

从电动车垂向振动系统与轮毂电机不平衡磁拉力间的机电耦合机理出发,建立电机偏心磁场和不平衡磁拉力的解析模型,并通过有限元模型和样机试验共同验证解析法的准确性,然后将随机路面激励和偏心不平衡磁拉力考虑进整车垂向振动系统,建立轮毂电机驱动电动汽车1/4车身垂向振动的机电耦合模型。

利用该机电耦合模型研究不同车速下机电耦合效应对车辆垂向动力学特性的影响,将电机定转子实时偏心引起的不平衡磁拉力引入1/4车身垂向振动系统,轮毂电机定子和车身的垂向振动加速度在不平衡磁拉力激励下,部分频率分量幅值增大,定子振动加剧,导致电机轴承磨损加重,电机寿命缩短,悬架动挠度增加,轮胎动载荷明显增大,轮胎抓地力减弱,车辆的行驶平顺性、操稳性、安全性和舒适性总体降低。

重点研究了轮毂电机驱动电动汽车在机电耦合效应下的车辆垂向动力学特性以及机电耦合效应对车辆平顺性的影响,揭示了轮毂电机驱动系统不平衡磁拉力的激励特性,为后续改善机电耦合效应引起的垂向振动负效应奠定理论基础。

### 参考文献

- [ 1 ] 马英, 邓兆祥, 谢丹. 电动轮车辆轮内主动减振系统设计与研究[J]. 系统仿真学报, 2014, 26(11): 2770-2778.  
Ma Y, Deng Z X, Xie D. Design and study of active suspension system on electric vehicles with in-wheel-motor[J]. Journal of System Simulation, 2014, 26(11): 2770-2778. (in Chinese)
- [ 2 ] 童炜, 侯之超. 轮毂驱动电动汽车垂向特性与电机振动分析[J]. 汽车工程, 2014, 36(4): 398-403,425.  
Tong W, Hou Z C. Analyses on the vertical characteristics and motor vibration of an electric vehicle with motor-in-wheel drive [J]. Automotive Engineering, 2014, 36(4): 398-403,425. (in Chinese)
- [ 3 ] Tian M J, Gao B Z. Dynamics analysis of a novel in-wheel powertrain system combined with dynamic vibration absorber[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 156: 104148.
- [ 4 ] 王骏骋, 何仁. 电动轮轮内主动减振器的非线性最优滑模模糊控制[J]. 汽车工程, 2018, 40(6): 719-725.  
Wang J C, He R. Nonlinear optimal sliding mode fuzzy control for in-wheel active vibration damper of electric wheel[J]. Automotive Engineering, 2018, 40(6): 719-725. (in Chinese)
- [ 5 ] Wang Y Y, Li Y N, Sun W, et al. Effect of the unbalanced vertical force of a switched reluctance motor on the stability and the comfort of an in-wheel motor electric vehicle[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 2015, 229(12): 1569-1584.
- [ 6 ] Chuan H, Shek J K H. Calculation of unbalanced magnetic pull in induction machines through empirical method[J]. IET Electric Power Applications, 2018, 12(9): 1233-1239.
- [ 7 ] 张河山, 邓兆祥, 杨金歌, 等. 表贴式永磁电机磁场的解析计算与分析[J]. 汽车工程, 2018, 40(7): 850-857,864.  
Zhang H S, Deng Z X, Yang J G, et al. Analytic calculation and analysis of magnetic field in surface-mounted permanent magnet motor[J]. Automotive Engineering, 2018, 40(7): 850-857,864. (in Chinese)
- [ 8 ] Tan D, Lu C. The influence of the magnetic force generated by the in-wheel motor on the vertical and lateral coupling dynamics of electric vehicles[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2016, 65(6): 4655-4668.
- [ 9 ] Ma C G, Chen C Y, Li Q, et al. Analytical calculation of no-load magnetic field of external rotor permanent magnet brushless direct current motor used as in-wheel motor of electric vehicle[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(4): 1-6.
- [ 10 ] Zhang H S, Deng Z X, Yang M L, et al. Analytical prediction of Halbach array permanent magnet machines considering finite tooth permeability[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2020, 56(6): 1-10.
- [ 11 ] Zhang H S, Yang M L, Zhang Y, et al. Analytical calculation of surface-inset PM in-wheel motors and reduction of torque ripple [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2021, 57(1): 1-11.
- [ 12 ] 杜刚, 邓兆祥, 张河山, 等. 表贴式永磁同步电机解析建模与极槽配合选取[J]. 重庆大学学报, 2021, 44(7): 1-13.  
Du G, Deng Z X, Zhang H S, et al. Analytical modeling and pole-slot combination of magnetic field in surface-mounted permanent-magnet synchronous motor[J]. Journal of Chongqing University, 2021, 44(7): 1-13. (in Chinese)
- [ 13 ] 任杰, 王秀和, 赵文良, 等. 永磁同步电机转子偏心空载气隙磁场解析计算[J]. 电机与控制学报, 2020, 24(8): 26-32.  
Ren J, Wang X H, Zhao W L, et al. Open circuit magnetic field prediction in permanent magnet synchronous machine with rotor eccentricity[J]. Electric Machines and Control, 2020, 24(8): 26-32. (in Chinese)
- [ 14 ] Chen X, Deng Z X, Hu J B, et al. An analytical model of unbalanced magnetic pull for PMSM used in electric vehicle:

- numerical and experimental validation[J]. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 2017, 54(4): 583-596.
- [15] Luo Y T, Tan D. Study on the dynamics of the in-wheel motor system[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2012, 61(8): 3510-3518.
- [16] Wang Y Y, Li P F, Ren G Z. Electric vehicles with in-wheel switched reluctance motors: coupling effects between road excitation and the unbalanced radial force[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 372: 69-81.
- [17] Li Z, Zheng L, Gao W Y, et al. Electromechanical coupling mechanism and control strategy for in-wheel-motor-driven electric vehicles[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 66(6): 4524-4533.
- [18] Li Z, Zheng L, Li Y N, et al. Effect of unbalanced vertical force of IWM on comfort and stability in four-wheel drive electric vehicle[C]//*Proceedings of the 19th Asia Pacific Automotive Engineering Conference & SAE-China Congress 2017: Selected Papers*. Singapore: Springer Singapore, 2018: 1045-1061.
- [19] 韩以伦, 李国珊, 陈涛. 双激励下轮毂电机悬置构型对电动车平顺性的影响[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2020, 52(9): 193-200.
- Han Y L, Li G S, Chen T. Effect of in-wheel motor suspended configuration on ride comfort of electric vehicle under dual excitations[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2020, 52(9): 193-200. (in Chinese)
- [20] Wu Z P, Zuo S G, Hu S L, et al. Analytical modelling of air-gap magnetic field of interior permanent magnet synchronous motors[J]. *IET Electric Power Applications*, 2020, 14(11): 2101-2110.
- [21] 殷琚, 陈辛波, 吴利鑫, 等. 滤波白噪声路面时域模拟方法与悬架性能仿真[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2017, 45(3): 398-407.
- Yin J, Chen X B, Wu L X, et al. Simulation method of road excitation in time domain using filtered white noise and dynamic analysis of suspension[J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2017, 45(3): 398-407. (in Chinese)
- [22] 全国机械振动、冲击与状态监测标准化技术委员会. 机械振动 道路路面谱测量数据报告: GB/T 7031—2005[S]. 北京: 中国标准出版社, 2005.
- Technical Committee for Standardization Administration of China on Mechanical Vibration, Shock and Condition Monitoring. Mechanical vibration—road surface profiles—reporting of measured data: GB/T 7031—2005[S]. Beijing: Standards Press of China, 2005.(in Chinese)

(编辑 罗 敏)