doi：10.11835/j.issn.1000-582X.2020.066

具有三种否定的模糊推理算法及应用

吴晓刚[1,2]
（1. 兴义民族师范学院 信息技术学院，贵州 兴义 562400；2. 同济大学 计算机科学与技术系，上海 201804）

摘要：模糊推理中，合成规则推理方法（compositional rule of inference, CRI）与基于贴近度的方法（similarity based approximate reasoning，SAR）都是建立在只有一种否定的经典模糊集上。针对广义模糊集 GFScom(generalized fuzzy sets with contradictory, opposite and medium negation)具有三种否定（矛盾否定、对立否定、中介否定）的特点，对模糊推理方法CRI的蕴含算子作了扩展。提出了具有三种否定的GFScom贴近度定义和公式，得到模糊近似推理的一种新的计算形式GSAR方法，证明了 GSAR 该方法具有 FMP(fuzzy modus ponens)还原性。通过应用实例对比，模糊推理GSAR的新方法不仅克服了CRI方法在建立模糊关系矩阵具有主观性和随意性的不足，而且客观有效地反映了模糊推理中的3种否定信息，丰富了模糊推理的形式。

关键词：广义模糊集；三种否定；贴近度；模糊推理
中图分类号：O159　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1000-582X(2024)02-032-08

Fuzzy reasoning algorithm and its application with three types of negation

WU Xiaogang[1,2]
(1. School of Information Technology, Xingyi Normal University for Nationalities, Xingyi 562400, Guizhou, P. R. China; 2. Department of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai 201804, P. R. China)

Abstract: In fuzzy reasoning, both the compositional rule of inference (CRI) and the similarity-based approximate reasoning (SAR) methods are built on classical fuzzy sets with only one negation. With considering the characteristics of the generalized fuzzy set(GFScom) that possesses three types of negation (contradiction, opposite and medium negation), an extension is made to the implication operator of the CRI fuzzy reasoning method. The definition and formula of GFScom closeness degree, which incorporates three types of negation, are presented. A new computational method of fuzzy approximate reasoning, named GSAR(generalized similarity-based approximate reasoning), is proposed. The method is proven to have reducibility for fuzzy modus ponens (FMP). Through comparative examples, the new GSAR fuzzy reasoning method not only overcomes the

收稿日期：2020-04-24　　**网络出版日期：**2020-12-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61673301);贵州省科学技术基金资助项目(黔科合基础1458号); 贵州省教育厅自然科学重点项目(黔教合KY字403)。
Supported by National Natrual Science Foundation of China(61673301), Guizhou Provincial Science and Technology Foundation (Grant No. 1458), and Educational Commission of Guizhou Province (Grant 403 Contract KY).
作者简介：吴晓刚（1970—），男，教授，主要从事非经典逻辑、人工智能应用研究，(E-mail)wxg817@163.com。

subjectivity and arbitrariness of the CRI method in establishing fuzzy relation matrices, but also objectively and effectively reflects three types of negative information in fuzzy reasoning, thereby enriching the forms of fuzzy reasoning.

Keywords: generalized fuzzy set; three types of negation; similarity measure; fuzzy reasoning

模糊推理被广泛地应用于人工智能、模糊控制、数据挖掘等领域[1-3]。其中,代表性的模糊推理方法有:Zadeh的合成规则推理方法(compositional rule of inference, CRI)[4],王国俊的全蕴涵三I算法[5],Turksen等[6]提出的基于贴近度的模糊推理算法(similarity-based approximate reasoning,SAR)。CRI方法采用模糊蕴涵算子构造模糊关系来推理,其运算规则的语义不明确,有时会产生不合理的结果[6]。SAR方法是通过计算事实与规则前件模糊集合的贴近度(相似度)来推理结果,计算简便且符合实际,引起国内外学者的关注[7-10]。

随着模糊知识的研究进展,对"否定知识"的认识和处理提出了新的要求,即只有一种否定的经典逻辑已不能满足知识处理的需要。不少学者提出了需要多种不同否定的思想和方法[11-13]。Pan[14]提出在模糊知识中存在三种不同的否定:矛盾否定、对立否定和中介否定。张胜礼等[15-16]构建了一种区分三种否定的广义模糊集GFScom,并应用在模糊综合评判、模糊系统设计领域。

非经典模糊逻辑和模糊推理虽然不再具有"非此即彼"的二值特性,但在基础概念上仍没有区分对立否定和矛盾否定,其形式语言的表示仍为A, ¬A(A的否定)[17]。因此,在模糊推理的各种算法中(如,CRI算法、三I算法等),也无法描述模糊概念间的三种不同否定关系。为此,在GFScom基础上对CRI蕴涵算子作三种否定形式的区分,从而拓展了模糊推理规则的形式。针对CRI方法的不足,研究了一种基于GFScom贴近度的模糊推理算法。该算法根据所给前提A^*和所给规则的前提A之间的具有三种否定的贴近度,对所给规则后件B动态选择调整函数得到结果B^*。将该方法应用在模糊推理的实例中,不仅计算方便而且有效地区分了模糊规则中的不同否定信息特别是中介否定信息。为方便论域X上的全体模糊集用$F(X)$表示,模糊集$A\in F(X)$在点$x\in X$处的隶属度为$A(x)$,A^c表示A的补集,即$x\in X$,$A^c(x)=1-A(x)$,模糊集A、B的内积与外积分别记为:$A\cdot B$、$A\otimes B$,复合运算$\circ$取$\vee$-$\wedge$运算。

1　预备知识

定义1.1[15]　映射$f: X\to Y$为论域X上的有限数值化区域映射,Y形如$[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b)或$\{a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$,其中,$a,b\in R$分别称为$Y$的左右端点。

定义1.2[15]　映射$T: [0,1]^2\to[0,1]$称为三角模,若T满足交换律、结合律、单调性和边界条件$T(0, 0) = 0$,$T(1, 1) =1$。若满足$T(a, 1) = a\ (\forall a\in[0,1])$,则称$T$为$t$-模($t$-norm);若三角模$T$满足$T(a, 0) = a\ (\forall a\in[0,1])$则称$T$为$t$-余模或$s$-模($s$-norm)。

定义1.3[15]　设$h:[0,1]\to[0,1]$满足

1) $h(0)=1, h(1)=0$;

2) $\forall a, b\in[0,1]$,若$a\leqslant b$,有$h(b)\leqslant h(a)$.

3) $h(h(a))=a, \forall a\in[0,1]$。

则称h为补。

定义1.4[15]　设$A\in F(X)$,a,b为X的左、右端点,$x\in X$,$*$为t-模,h为补算子。

1) 若映射$A^{\neg}:X\to[0,1]$满足$A^{\neg}(x)=h(A(x))$,称$A^{\neg}$确定的模糊子集为A的矛盾否定集。特别地,若h为线性补,则称$A^{\neg}(x)=h(A(x))=1-A(x)$确定的模糊子集为$A$的矛盾否定集。

2) 若映射$A^{\rceil}:X\to[0,1]$满足$A^{\rceil}(x)=A(a+b-x)$,则称$A^{\rceil}$确定的模糊子集为A的对立否定集。

3) 若映射$A^{\sim}:X\to[0,1]$满足$A^{\sim}(x)=A^{\neg}(x)*(A^{\rceil})^{\neg}(x)=h(A(x))*h(A^{\rceil}(x))=h(A(x))*h(A(a+b-x))$,称$A^{\sim}$确定的模糊子集为$A$的中介否定集。特别地,若$t$-模$*$取min,$h$取线性补,则称$A^{\sim}(x)=\min\{1-A(x), 1-A(a+b-x)\}$为$A$的中介否定集。

上述定义中给出的模糊集称为“区分矛盾否定、对立否定和中介否定的广义模糊集”(generalized fuzzy sets with contradictory, opposite and medium negation),记为GFScom。

例1 若年龄集 $U=[0,100]$,$Y=$“青年人”是 U 的一个模糊子集,其隶属函数为

$$Y(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 25, \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{15}\right)^2}, & 25<x\leqslant 100。\end{cases} \tag{1}$$

根据广义模糊集GFScom定义,“青年人”的矛盾否定集是“非青年人”:$Y^{\neg}(x)=f(Y(x))=1-Y(x)$,其对立否定集 $Y=$“老年人”: $Y^{\urcorner}(x)=Y(0+100-x)=Y(100-x)$,其中,介否定集 $M=$“中年人”:$Y^{\sim}(x)=Y^{\neg}(x)*(Y^{\urcorner})^{\neg}(x)=f(Y(x))*f(Y^{\urcorner}(x))=f(Y(x))*f(Y(100-x))=\min(1-Y(x), 1-Y(100-x))$。若有人的年龄 $x=35$,则由式(1)可计算该年龄属于青年人、非青年人、老年人、中年人的隶属度分别为:0.69,0.31, 0.12,0.31。

其中,T 模(S 模)和补运算 h 可根据实际选取不同的算子。

性质1.1[16] 设 A, B 为论域 X 上的GFScom,a, b 分别为 X 的左、右端点,则

1) $A^{\neg\neg}=A$,(2)$A^{\neg\neg}=A$,(3)$A^{\sim}=A^{\urcorner\sim}$。

证明 1)$\forall x\in X$,$A^{\neg\neg}(x)=1-A^{\neg}(x)=1-(1-A(x))=A(x)$,所以 $A^{\neg\neg}=A$。

2)$\forall x\in X$,$A^{\urcorner\urcorner}(x)=A^{\urcorner}(a+b-x)=A(a+b-(a+b-x)=A(x)$,所以 $A^{\neg\neg}=A$。

3)$\forall x\in X$,$A^{\urcorner\sim}(x)=\min\{1-A^{\urcorner}(x), 1-A^{\urcorner}(a+b-x)\}=\min\{1-A^{\urcorner}(x), 1-A(x)\}=\min\{1-A(x), 1-A(a+b-x)\}=A^{\sim}(x)$,所以 $A^{\sim}=A^{\urcorner\sim}$。

性质1.1反应了“否定之否定”(对立否定和矛盾否定)及“中介之对立”与其自身相等的中介思想。

性质1.2[16] 设 A, B 为论域 X 上的GFScom,a, b 分别为 X 的左、右端点,则

1) $A\subseteq B \Leftrightarrow B^{\neg}\subseteq A^{\neg}$

2) $A\subseteq B \Leftrightarrow A^{\urcorner}\subseteq B^{\urcorner}$

3) $A\subseteq B \Leftrightarrow B^{\sim}\subseteq A^{\sim}$

定义1.5[18] $F(X)$ 是论域 X 上的模糊集,称实值函数 $t: F(X)\times F(X)\to[0,1]$ 为 $F(X)$ 上的贴近度,如果 t 满足以下条件:

1) $\forall a\in F(X)$,$t(A,A)=1$;

2) $\forall A, B\in F(X)$,$t(A,B)=t(B,A)$;

3) $\forall a\in F(X)$,$t(A,A^{c})=0$;

4) 若 $A\subseteq B\subseteq C$,则 $t(A,C)\leqslant t(A,B)$,$t(A,C)\leqslant t(B,C)$。

满足定义1.5的映射函数不是唯一,贴近度的计算方法也不唯一,以下给出几个常见的实例:

例2 海明贴近度 $N_H(A,B)$ 与欧几里德贴近度 $N_E(A,B)$:[18]

$$N_H(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|u_A(x_i)-u_B(x_i)\right|, \tag{2}$$

$$N_E(A,B)=1-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(u_A(x_i)-u_B(x_i)\right)^2}。 \tag{3}$$

满足贴近度公理化定义1.5的计算公式有多种形式。以上贴近度的定义是建立在只有一种否定的经典模糊集 $F(X)$ 上,定义1.5中条件(3)对于广义模糊集的中介否定情形下,$t(A, A^{\neg})=0$ 不一定成立。为此,将讨论区分三种否定的广义模糊集GFScom上贴近度定义和性质。

2 GFScom的贴近度

定义2.1 $GF(X)$ 是论域 X 上的GFScom,若 $\forall A, B, C\in GF(X)$,称函数 $t: GF(X)\times GF(X)\to[0,1]$ 为 $GF(X)$ 的贴近度,如果 t 满足以下条件:

1) $t(A,A)=1$,$t(X,\varnothing)=0$;

2) $t(A, B)=t(B, A)$;

3)若 $A\subseteq B\subseteq C$,则 $t(A,C)\leqslant t(A,B)$,$t(A,C)\leqslant t(B,C)$ 。

性质 2.1　设 t 为 GFScom 的贴近度, 对 $\forall A, B, C\in GF(X)$有：

1) $t(A, A^{-})= t(A, A^{\neg})=t(A, A^{\sim})=0$ 当且仅当 $A=X$;

2)当 $A\subseteq B\subseteq C$,则

$t(A^{-},C^{-})\leqslant\min(t(A^{-},B^{-}), t(B^{-},C^{-}))$ ；

$d(A^{\neg},C^{\neg})\leqslant\min(t(A^{\neg},B^{\neg}), t(B^{\neg},C^{\neg}))$ ；

$t(A^{\sim}, C^{\sim})\leqslant\min(t(A^{\sim}, B^{\sim}), t(B^{\sim}, C^{\sim}))$ 。

3)$\min\{t(A,B^{-}), t(A,B^{\neg})\}\leqslant t(A,B^{\sim})\leqslant\max\{t(A,B^{-}), t(A,B^{\neg})\}$。

证明　1)由 GFScom 的定义知,$A=X\Leftrightarrow A^{-}=A^{\neg}=A^{\sim}=0$,所以 $t(A, A^{-})=t(A, A^{\neg})=tA, A^{\sim})=0$。

2) 由 GFScom 的定义 1.2 性质知：

$A\subseteq B\subseteq C\Leftrightarrow C^{-}\subseteq B^{-}\subseteq^{-}A$, $A^{\neg}\subseteq B^{\neg}\subseteq C^{\neg}$, $C^{\sim}\subseteq B^{\sim}\subseteq A^{\sim}$,

所以有：$t(A^{-},C^{-})\leqslant\min(t(A^{-},B^{-}), t(B^{-},C^{-}))$ ；

$t(A^{\neg},C^{\neg})\leqslant\min(t(A^{\neg},B^{\neg}), t(B^{\neg},C^{\neg}))$；

$t(A^{\sim}, C^{\sim})\leqslant\min(t(A^{\sim}, B^{\sim}),t(B^{\sim}, C^{\sim}))$。

3)由 GFScom 的定义知：

$\min\{B^{-}, B^{\neg}\}\leqslant B^{\sim}\leqslant\max\{B^{-}, B^{\neg}\}$,所以有:

$\min\{t(A,B^{-}), t(A,B^{\neg})\}\leqslant t(A,B^{\sim})\leqslant\max\{t(A,B^{-}), t(A,B^{\neg})\}$;证毕。

定义 2.1　给出了 GFScom 贴近度的公理化形式,以下讨论具有该贴近度在实际应用中的计算公式。

定理 2.1　$GF(X)$是论域 X 上的 GFScom,$\forall A, B\in GF(X)$, $\forall x\in X$,那么

$$N(A,B)=1-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|A(x_i)-B(x_i)|+|A^{\sim}(x_i)-B^{\sim}(x_i)|)\text{。}\tag{4}$$

是模糊集 GFScom 上的贴近度,其中,t-模*取 min,h 取线性补。其中：

$$A^{\sim}(x)=A^{-}(x)*(A^{\neg})^{-}(x), B^{\sim}(x)=B^{-}(x)*(B^{\neg})^{-}(x)\text{。}$$

证明　1) 显然 $N(A,A)=1-0=1$。

当 $A=X$,则 $\forall x\in X$, $A(x)=1$,$A^{-}(x)=1-A(x)=0$, $A^{\sim}(x)=\min(A^{-}(x),(A^{\neg})^{-}(x))=0$;

当 $A=\varnothing$ 时, $A(x)=0$, $A^{-}(x)=A^{\neg}(x)=1$,则 $A^{\sim}(x)=1$,所以 $N(X,\varnothing)=1-1=0$。

2) 显然 $N(A,B)=N(B,A)$ 成立。

3) 对 $\forall x_i\in X$,由 GFScom 的性质,当 $A\subseteq B\subseteq C$ 时 $C^{\sim}\subseteq B^{\sim}\subseteq A^{\sim}$,有 $A(x_i)\leqslant B(x_i)\leqslant C(x_i)$, $C^{\sim}(x_i)\leqslant B^{\sim}(x_i)\leqslant A^{\sim}(x_i)$,那么：$A(x_i)-C(x_i)\leqslant B(x_i)-C(x_i)$, $B^{\sim}(x_i)-C^{\sim}(x_i)\leqslant A^{\sim}(x_i)-C^{\sim}(x_i)$,所以

$$N(A,C)=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-C(x_i)|+|A^{\sim}(x_i)-C^{\sim}(x_i)|}{2n}\leqslant 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}|B(x_i)-C(x_i))+|B^{\sim}(x_i)-C^{\sim}(x_i)|}{2n}=N(B,C)\text{。}$$

同样可证 $N(A,C)\leqslant N(A,B)$,所以 (4) 式是广义模糊集 GFScom 上的贴近度。证毕。

定理 2.2　若 A、B 是论域 X 上的 GFscom,则 $N(A,B)=\frac{1}{2}[A\cdot B+(1-A\otimes B)]$是模糊集 GFScom 的贴近度,其中 $A\cdot B=\frac{1}{2}\{\vee[A(x_i)\wedge B(x_i)]+\vee[(1-A^{\sim}(x_i))\wedge(1-B^{\sim}(x_i))]\}$,$A\otimes B=\frac{1}{2}\{\wedge[A(x_i)\vee B(x_i)]+\wedge[(1-A^{\sim}(x_i)))\vee(1-B^{\sim}(x_i))]\}$,$A\cdot B$ 为内积,$A\otimes B$ 为外积。

证明：　由 $N(A,A)=1$, $N(A,\varnothing)=0$，$N(A,B)=N(B,A)$,定义 2.1 的条件(1)(2)显然成立。

再证条件(3)也成立。

对 $\forall x_i\in X$,当 $A\subseteq B\subseteq C$ 时 $A(x_i)\leqslant B(x_i)\leqslant C(x_i)$, $C^{\sim}(x_i)\leqslant B^{\sim}(x_i)\leqslant A^{\sim}(x_i)$。

$$A\cdot B=\frac{1}{2}\{\vee A(x_i)+\vee(1-A^{\sim}(x_i)),\quad A\cdot C=\frac{1}{2}\{\vee A(x_i)+\vee(1-A^{\sim}(x_i)],\text{所以 } A\cdot B=A\cdot C\text{。}$$

$A\otimes B=\frac{1}{2}\{\wedge B(x_i)+\wedge(1-B^{\sim}(x_i)]$，$A\otimes C=\frac{1}{2}\{\wedge C(x_i)+\wedge(1-C^{\sim}(x_i)\}$,有 $A\otimes B\leqslant A\otimes C$,

$1-A\otimes C\leqslant 1-A\otimes B$。

所以，$\frac{1}{2}\left[A\cdot C+\left(1-A\otimes C\right)\right]\leqslant\frac{1}{2}\left[A\cdot B+\left(1-A\otimes B\right)\right]$。即$N\left(A,C\right)\leqslant N\left(A,B\right)$。

同样可证，$N\left(A,C\right)\leqslant N\left(B,C\right)$。证毕。

3 具有三种否定的模糊推理合成算法

模糊推理中，FMP (fuzzy modus ponens)[19]的表达式为：已知$A\rightarrow B$输入A^*，输出B^*。FMT (fuzzy modus tollens)[19]的表达式为：已知$A\rightarrow B$输入B^*，输出A^*。其中A，A^*是某论域X上的模糊集，而B，B^*则是论域Y上的模糊集。

对这2种模型，模糊推理CRI方法[4]是将蕴涵关系$A\rightarrow B$转化为一个$X\times Y$上的模糊关系R，将A^*与R合成就得到B^*即：$B^*(y)=A^*(x)\circ R(A(x),B(y))$，其中，$R(A(x),B(y))$是在$(x,y)$的隶属函数，复合运算$\circ$取$\vee$-$\wedge$运算，Zadeh使用的蕴涵算子：

$$R_Z(a,b)=(1-a)\vee(a\wedge b),\ a,b\in[0,1]。\tag{5}$$

模糊控制中常用的蕴涵算子还包括Mamdani取小算子：

$$R_M(a,b)=a\wedge b,\ a,b\in[0,1]。\tag{6}$$

对$R_Z(a,b)$算子推广到区分三种否定(矛盾否定¬、对立否定╕和中介否定~)的模糊集GFScom上，扩展的蕴涵算子表示为

$$R_Z^{\neg}(a,b)=\neg a\vee(a\wedge b),\ a,b\in[0,1]\ ;\tag{7}$$

$$R_Z^{╕}(a,b)=╕a\vee(a\wedge b),\ a,b\in[0,1]\ ;\tag{8}$$

$$R_Z^{\sim}(a,b)=\sim a\vee(a\wedge b),\ a,b\in[0,1]\ 。\tag{9}$$

GMP算法(fuzzy modus ponens base on GFScom)：A, B, A^*, B^*为论域X上的GFScom，若$A\rightarrow B$且x为A成立，如果x为A^*成立，那么y为B^*成立可表示为：$B^*=A^*$。$\Re_G$，复合运算取$\vee$-$\wedge$运算，区分三种否定的蕴涵算子$\Re_G$由式(7)(8)(9)定义。

GMT算法(fuzzy modus tollens base on GFScom)：A, B, A^*, B^*为论域X上的GFScom，若$A\rightarrow B$且y为B^*成立，那么x为A^*成立可表示为：$A^*=B^*\circ\Re_G^{-1}$，其中复合运算。取$\vee$-$\wedge$运算，区分三种否定的蕴涵算子$\Re_G^{-1}(a,b)=\Re_G(b,a)$由式(7)(8)(9)定义。

4 基于GFScom贴近度的模糊推理算法

基于广义模糊集GFScom贴近度的模糊推理算法(similarity based approximate reasoning for GFScom, GSAR)是在SAR算法[6]基础上作了改进。GSAR算法根据所给前提A^*和所给规则的前提A之间的具有三种否定的贴近度，对所给规则后件B通过梯度变化的方向来动态选择调整函数得到结果B^*。算法如下：

1）计算前提A^*和规则A之间的基于GFScom的贴近度$N(A,A^*)$。

2）计算贴近度$N(A,A^*)$的梯度变化方向。

$$f\left(A,A^*\right)=\left[A\left(x_i\right)-A^*\left(x_i\right)\right]。$$

3）对规则后件B按梯度变化的方向选择递增或递减的调整函数S_i, $i=1,2$，得到推理结果B^*。

调整函数：S_1：$B^*=\min\{1,B/N(A^*,A)\}$；

S_2：$B^*=B\times N(A^*,A)$。

调整算法：if $f\left(A,A^*\right)\geqslant 0$ then S_1 else S_2。

4）若有多条规则，则对推理结果进行合成。GSAR模糊推理方法是面向产生式规则的推理，下面证明其FMP还原性问题。

定理4.1 GSAR算法具有FMP还原性。即在FMP算法的条件中，当$A^*=A$时，GSAR算法求得的$B^*=B$。

证明：当$A^*=A$时，显然有$N(A,A^*)=1$。

当调整函数取S_1时，

$B^*=\min\{1,B/N(A^*,A)\}=\min\{1,B\}=B^*$。

当调整函数取S_2时，

$B^{*}= B\times N(A^{*},A)= B^{*}$。

综上所述,当 $A^{*}=A$ 时,$B^{*}=B$ 证毕。

5 应用实例

某水位控制系统,水位与阀门的开关程度有关,根据实践经验总结的规则:“若水位高,则阀门打开程度大”。假定水位 x 的论域 X 与阀门的打开程度 y 的论域 Y 都分为 5 档:$X=Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$。若 A,B,C 是 GFScom 模糊集,其中,$A(x)$代表水位“高”的隶属度:$A(x)=\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.8}{5}$, $B(y)$代表阀门打开程度“大”的隶属度:$B(y)=\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}$。

问题:

1) 求水位“低”和“中”时的阀门打开程度。

2) 若已知水位 A^*,$A^*(x)=\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.7}{5}$,求此时阀门打开程度的模糊结论 B^*。

解:1) 根据定义 1.5,对水位和阀门的论域通过映射转换成有限数值集(x, y)即$(0,6)$。把模糊集 $A(x)$、$B(y)$表示成向量:$A(x)=(0\ 0.2\ 0.4\ 0.5\ 0.8)$,$B(y)=(0\ 0\ 0.3\ 0.5\ 1.0)$。模糊规则“若水位高,则阀门打开程度大”,表示为:$A(x)\rightarrow B(y)$的模糊蕴涵关系 $R(x,y)$采用 Mamdani 取小蕴涵算子$\vee$-$\wedge$合成,则:

$$R(x,y)=A(x)^{T}\circ B(y)=$$

$$\begin{pmatrix}0\\0.2\\0.4\\0.5\\0.8\end{pmatrix}\circ(0\ 0\ 0.3\ 0.5\ 1.0)=$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0.2&0.2&0.2\\0&0&0.3&0.4&0.4\\0&0&0.3&0.5&0.5\\0&0&0.3&0.5&0.8\end{pmatrix}。$$

GFScom 的定义 1.4,水位“低”是水位“高”的对立否定集,则 $A^{\neg}(x)=A(6-x)=\frac{0.8}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.2}{4}$,写成向量形式 $A^{\neg}(x)=(0.8,0.5,0.4,0.2, 0)$。由模糊推理的 CRI 合成算法,取复合运算$\circ$为$\vee$-$\wedge$运算,得

$$B_1(y)=A^{\neg}(x)\circ R(x,y)=$$

$$(0.8,0.5,0.4,0.2,0)\circ\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0.2&0.2&0.2\\0&0&0.3&0.4&0.4\\0&0&0.3&0.5&0.5\\0&0&0.3&0.5&0.8\end{pmatrix}=$$

$$(0,0,0.3,0.4,0.4),$$

则水位低阀门打开程度为:$B_1(y)=\frac{0.3}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.4}{4}$。

水位“中”是“高”和“低”的中介否定集。先求水位“不高”$A^{\sim}(x)$和“不低”$A^{\neg\sim}(x)$的隶属函数。$A^{\sim}(x)=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.2}{5}$,$A^{\neg\sim}(x)=\frac{0.2}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}$ 可得:$A^{\sim}(x)=\frac{0.2}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.2}{5}$,写成向量:$A^{\sim}(x)=(0.2,0.5,0.6,0.5,0.2)$。

由 CRI 合成运算:

$$B_2(y)=A^{\sim}(x)\circ R(x,y)=$$

$$(0.2,0.5,0.6,0.5,0.2)\circ\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0.2&0.2&0.2\\0&0&0.3&0.4&0.4\\0&0&0.3&0.5&0.5\\0&0&0.3&0.5&0.8\end{pmatrix}=$$

$$(0,0,0.3,0.5,0.5)。$$

则水位中阀门的打开程度 $B_2(y)=\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.5}{5}$,可知阀门比水位高时打开的程度小,比水位低时打开的程度要大。

2)已知 $A^*(x)$,根据 GFScom 定义可计算出 $A^{*\sim}(x)=\frac{0.2}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.2}{5}$,依照 GSAR 算法,先求 A^* 与 A 贴近度和梯度变化方向:

$$N(A,A^*)=1-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|A(x_i)-A^*(x_i)\right|+\left|A^{\sim}(x_i)-A^{*\sim}(x_i)\right|\right)=0.92,$$

$$f(A,A^*)=\sum_{i=1}^{n}\left(A^*(x_i)-A(x_i)\right)=-0.3,$$

选择调整函数 S_2:$B^*=B\times N(A^*,A)$,对"$y\in Y$,有 $B_1^*(y)=B_1^*(y)\times 0.92=\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{0.276}{3}+\frac{0.46}{4}+\frac{0.92}{5}$。

为方便对照,采用经典的 CRI 方法计算结果:$B_2^*(y)=\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.5}{5}$。

从结果分析,$B_1^*(y)$ 和 $B_2^*(y)$ 在{1,2,3,4}元素的隶属度部分相同或基本相似,而{5}这个元素的隶属度从直观上很容易看出 $B_1^*(y)$ 的结果 0.92 比 $B_2^*(y)$ 的 0.5 更接近客观实际。

6 结束语

1) 在具有三种否定的广义模糊集 GFScom 上区分了 CRI 方法蕴涵算子的不同否定形式,得到了扩展的模糊取式和模糊拒式算法。在 GFscom 中,有 $A^{\sim}=A^{\sim}*(A^{\neg})^{\sim}$,而在经典的 CRI 算法中,将对立否定与矛盾否定视为同一,从而有 $A^{\sim}=A^{\neg}=A^{\sim}$。

2) 研究了具有三种否定的贴近度公理化定义和性质,给出了两种不同的 GFScom 贴近度的计算公式。

3) 基于 GFScom 贴近度提出了一种区分三种否定的模糊推理新方法 GSAR,证明了该算法满足模糊推理原则的还原性。新算法采用规则前件命题与观测事实的贴近度来实现近似推理,计算简便且克服了 CRI 方法在建立模糊关系矩阵具有主观性和随意性的不足。

4) 给出了一个模糊推理的综合应用,通过实例表明,GSAR 算法与经典的 CRI 算法得到的结果稍有不同,但新算法考虑了模糊知识的三种不同的"否定",体现了模糊规则的中介否定信息,从逻辑角度上看,GSAR 算法更符合客观事实,为模糊近似推理提供了一种新的方法。

参考文献

[1] Deschrijver G, Kerre E E. On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modelling imprecision [J]. Information Sciences, 2007, 177(8): 1860-1866.

[2] Dai S S, Pei D W, Wang S M. Perturbation of fuzzy sets and fuzzy reasoning based on normalized Minkowski distances[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 189(1): 63-73.

[3] Li D C, Li Y M. Algebraic structures of interval-valued fuzzy-implications[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(6): 892-900.

[4] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, SMC-3(1): 28-44.

[5] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三I算法[J]. 中国科学E辑: 技术科学, 1999, 29(1): 43-53.
Wang G J. Full implication triple I algorithm for fuzzy reasoning[J]. Science in China, Ser E, 1999, 29(1): 43-53.(in Chinese)

[6] Turksen I B, Zhong Z. An approximate analogical reasoning approach based on similarity measures[J]. IEEE Transactions on

Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18(6): 1049-1056.

[7] Wang D G, Meng Y P, Li H X. A fuzzy similarity inference method for fuzzy reasoning[J]. Computers & Mathematics With Applications, 2008, 56(10): 2445-2454.

[8] 何映思, 全海金, 邓辉文. 具有还原性的多重多维模糊推理算法[J]. 计算机科学, 2007, 34(4): 145-148.
He Y S, Quan H J, Deng H W. An algorithm of general fuzzy inference with the reductive property[J]. Computer Science, 2007, 34(4): 145-148.(in Chinese)

[9] 孟艳平. 基于相似度的信息权重模糊推理方法[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2008, 44(1): 21-24.
Meng Y P. Similarity-based information weighted fuzzy reasoning[J]. Journal of Beijing Normal University (Natural Science), 2008, 44(1): 21-24.(in Chinese)

[10] 李莹芳, 秦克云, 何星星, 等. 基于统一贴近度的模糊推理新方法[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(3): 51-58.
Li Y F, Qin K Y, He X X, et al. A new similarity-based approximate reasoning method based on unified similarity measures[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(3): 51-58.(in Chinese)

[11] Wagner G. Web rules need two kinds of negation[C]//International Workshop on Principles and Practice of Semantic Web Reasoning. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003: 33-50.

[12] Analyti A, Antoniou G, Damásio C, et al. Negation and negative information in the W3C resource description framework[J]. Annals of Mathematics, Computing & Teleinformatics (AMCT), 2004, 1(2): 25-34.

[13] Pan Z H, Zhang S L. Five kinds of contradictory relations and opposite relations in inconsistent knowledge[C]//Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD 2007). August 24-27, 2007, Haikou, China. IEEE, 2007: 761-766.

[14] Pan Z H. Fuzzy set with three kinds of negations in fuzzy knowledge processing[C]//2010 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. July 11-14, 2010, Qingdao, China. IEEE, 2010: 2730-2735.

[15] 张胜礼, 李永明. 广义模糊集 GFScom 在模糊综合评判中的应用[J]. 计算机科学, 2015, 42(7): 125-128, 161.
Zhang S L, Li Y M. Application of generalized fuzzy sets GFScom to fuzzy comprehensive evaluation[J]. Computer Science, 2015, 42(7): 125-128, 161.(in Chinese)

[16] 张胜礼, 李永明. 否定知识的代数表示及在模糊系统设计中的应用[J]. 计算机学报, 2016, 39(12): 2527-2546.
Zhang S L, Li Y M. Algebraic representation of negative knowledge and its application to design of fuzzy systems[J]. Chinese Journal of Computers, 2016, 39(12): 2527-2546.(in Chinese)

[17] 潘正华. 知识中不同否定关系的一种逻辑描述[J]. 自然科学进展, 2008, 18(12): 1491-1499.
Pan Z H. A logical description of different negative relationships in knowledge[J]. Journal of Advances in Natural Science, 2008, 18(12): 1491-1499. (in Chinese)

[18] Liu X C. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 52(3): 305-318.

[19] Mas M, Monserrat M, Torrens J. Modus ponens and modus Tollens in discrete implications[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 49(2): 422-435.

(编辑　陈移峰)