

doi: 10.11835/j.issn.1000-582X.2023.207

# 电-水耦合系统双线性加权最小二乘状态估计

崔镜心<sup>1</sup>, 赵霞<sup>1</sup>, 王 骆<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 电气工程学院, 重庆 400044; 2. 国网河北经研院, 石家庄 050000)

**摘要:** 多能流状态估计是能源互联网的重要研究领域。目前, 关于电-水耦合系统状态估计的研究刚起步, 还存在对水网工况适应性差、对电-水耦合信息利用不充分等问题。为此, 提出一种考虑管道摩阻系数修正的水网双线性最小二乘 (weighted least square, WLS) 状态估计方法, 并进一步基于水泵虚拟测量构造电-水耦合信息双向传递, 提出适用于电-水耦合系统分立运行、协同运行和联合运行的双线性 WLS 状态估计方法。用 11 节点水网及其与 IEEE-14 节点、IEEE-118 节点电网耦合形成的 2 个电-水耦合系统验证了所提双线性 WLS 估计的有效性。算例结果证明了水网状态估计中修正管道摩阻系数的必要性与双线性 WLS 估计方法在计算效率与小流量水网适应性方面的优越性, 以及协同估计与联合估计在提升电网/水网状态估计精度、数据一致性与可观性方面的有效性。

**关键词:** 能源互联网; 状态估计; 电力系统; 水网; 最小二乘; 双线性估计

中图分类号: TM732

文献标志码: A

文章编号: 1000-582X(2024)11-065-16

## Bilinear weighted least square state estimation of the electricity-water coupled system

CUI Jingxin<sup>1</sup>, ZHAO Xia<sup>1</sup>, WANG Luo<sup>2</sup>

(1. School of Electrical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P. R. China; 2. Economic and Technology Research Institute, State Grid Hebei Electric Power Co., Ltd., Shijiazhuang 050000, P. R. China)

**Abstract:** Multi-energy flow state estimation is a critical area of research in the energy internet. Current research on the state estimation of electricity-water coupling system is still in its infancy, facing challenges such as poor adaptability to water network conditions and insufficient utilization of electricity-water coupling information. To address these issues, this paper proposes a bilinear weighted least square (WLS) state estimation method for water networks, considering the correction of the friction coefficient. By incorporating virtual measurements of water pumps and bi-directional transmission of coupling information, a bilinear WLS state estimation method is developed, suitable for interdependent, cooperative and joint operations of electricity-water coupling systems. The effectiveness of the proposed method is verified by an 11-node water network and two electricity-water coupling systems, formed by coupling with IEEE-14 node and IEEE-118 node power systems. Numerical results highlight the necessity of correcting the friction coefficient in water network state estimation, the computational efficiency and adaptability of the bilinear WLS method for low flow rate water networks, and the the improvement in accuracy, data consistency and observability achieved through cooperative and joint estimation for both power

收稿日期: 2023-02-15 网络出版日期: 2023-05-08

作者简介: 崔镜心 (1999—), 女, 硕士研究生, 主要从事综合能源系统状态估计研究, (E-mail) 202011021024@cqu.edu.cn。

通信作者: 赵霞, 女, 副教授, (E-mail)zx@cqu.edu.cn。

systems and water networks.

**Keywords:** energy internet; state estimation; power system; water network; least square; bilinear estimation

能源互联网以电力、天然气、热力系统等多种能源系统互联互通形成的综合能源系统(integrated energy system, IES)为物理载体,以多能互补、开放共享为基本特征,近年来逐渐发展成为能源领域的前沿方向<sup>[1]</sup>。能源互联网中多能流系统的高效协同运行与控制需要利用数据采集与监控(supervisory control and data acquisition, SCADA)系统提供的量测数据,并通过状态估计来提供完整、可靠、准确的多能流模型与状态数据来实现。

目前,多能流状态估计已成为能源互联网的重要研究内容。国内外学者以电网状态估计为基础,结合多能流耦合特性,开展了大量关于多能流状态估计的研究<sup>[2]</sup>,涉及电-气 IES<sup>[3-5]</sup>、电-热 IES<sup>[6-8]</sup>和电-气-热 IES<sup>[9-10]</sup>等多种耦合系统。其中,文献[3]和文献[8]是较早关注多能流状态估计的研究,基于加权最小二乘(weighted least squares, WLS)方法分别实现了电-热和电-气 IES 的状态估计;此后,在多能流状态估计领域进一步出现加权最小绝对值估计<sup>[6]</sup>、基于交替方向乘子法的分布式状态估计<sup>[9]</sup>等方法。

不仅电-气、电-热和电-气-热之间存在耦合关系,电网与水网之间也有密切关联。电力生产需要大量取水,水的取用、处理和输送需要消耗大量电力(电力驱动水泵耗能占比最大,据统计中国 2015 年仅泵取地下水消耗的电能就高达 45 800 GW·h<sup>[11]</sup>)。在能源互联网背景下,尽管已有大量关于电-水耦合系统潮流<sup>[12]</sup>、最优潮流<sup>[13]</sup>及协同调度<sup>[14]</sup>的研究,但关于电-水耦合系统状态估计的研究才刚刚起步<sup>[15]</sup>。

电-水耦合系统状态估计以电网和水网状态估计为基础,需要重点处理电-水耦合环节带来的新问题。电网状态估计最早由 Scheweppe 教授于 20 世纪 70 年代提出<sup>[16]</sup>,目前已有十分成熟的理论和方法;水网状态估计在很大程度上借鉴了电网的研究思路,也针对水力状态估计、水质估计、泄漏检测等特殊问题形成了一系列水网状态估计方法。与电网类似,水网状态估计同样以 WLS 估计为基础<sup>[17-22]</sup>,分别以节点水头<sup>[18]</sup>、环路修正流量<sup>[19]</sup>为状态变量,基于节点流量平衡方程<sup>[20]</sup>或环能量方程<sup>[21]</sup>建立水网的 WLS 估计模型, Bargiela<sup>[22]</sup>特别针对小流量工况讨论了 WLS 估计的收敛性问题。可见,无论是电网、水网还是各种 IES,最基本且应用最广泛的状态估计方法都是 WLS 估计, Moazeni 等<sup>[15]</sup>同样报道了基于 WLS 估计实现电-水耦合系统状态估计。然而,电网和各种 IES 的 WLS 估计本质上都是非线性非凸优化问题,存在收敛性问题及全局寻优困难问题<sup>[23]</sup>。为此, Gomez-Exposito 等<sup>[24]</sup>提出电网状态估计的双线性 WLS 方法,通过引入辅助量测量和辅助状态变量,将原非线性 WLS 问题转化为 2 个线性 WLS 问题(即“双线性化”)和一个非线性变换过程;之后,该方法进一步发展为考虑等式约束的双线性估计方法<sup>[25]</sup>和双线性抗差估计方法<sup>[26-27]</sup>。随着能源互联网的发展,双线性估计方法也从电网状态估计进一步推广应用于电-气 IES<sup>[28]</sup>、电-热 IES<sup>[29]</sup>及电-气-热 IES<sup>[9]</sup>的多能流状态估计。

如前所述,文献[15]是目前仅有的关于电-水耦合系统状态估计的专题研究,但还存在以下局限:1)方法本质上是求解水网和电网 2 个非线性 WLS 估计问题,难以克服非线性 WLS 模型固有的收敛性问题和全局寻优困难;2)仅将水泵功率用于电网状态估计而未考虑水泵功率对水网状态估计的作用,对电-水耦合信息的利用并不充分;3)为电网和水网的状态估计问题的顺序求解,未讨论耦合系统运行管理模式对状态估计的影响;4)采用 Hazen-Williams(H-W)公式<sup>[30]</sup>描述管道水头损失,而 H-W 公式对流态及管道粗糙度有一定限制。这些影响了文献[15]的工程适用性。

水网及电-水耦合系统量测方程的非线性导致其状态估计是一个非线性 WLS 问题,因此,文中将应用双线性估计的基本思想,研究适用于水网和电-水耦合系统状态估计的双线性估计方法。需要指出,热网含水力和热力 2 个部分,涉及热网双线性估计方法的研究(如文献[9]与文献[29]),对水网的双线性化有一定参考意义。但是,热网水力工况平稳,水压和流量变化不大,而水网工况取决于水负荷,变化幅度大,对管道方程的适用性要求更高;此外,水网通常需要配置水泵来补偿水头损失,而现有的关于热网、电-热 IES<sup>[6-8,29]</sup>及电-气-热 IES<sup>[9-10]</sup>状态估计的研究均未涉及水泵。

文中的主要工作如下:1)提出水网与电-水耦合元件量测方程的双线性化方案;2)为保证管道方程对水

网水力工况的适应性,提出考虑管道摩阻系数修正的水网双线性 WLS 估计方法;3)为适应电-水耦合系统的不同运营模式,提出以水泵虚拟量测实现电-水耦合信息双向传递的双线性协同估计和联合估计方法。分别用水网和 2 个不同规模电-水耦合系统算例验证所提双线性 WLS 估计方法的有效性。

## 1 电-水耦合系统的量测方程

电-水耦合系统量测方程由电网、输配水网与电-水耦合环节 3 部分量测方程组成。电网量测方程以经典交流潮流方程为基础,以下重点说明输配水网与电-水耦合环节的量测方程。

### 1.1 电网的量测方程

考虑电网量测数据为 SCADA 系统提供的节点电压幅值、支路有功/无功功率及节点注入有功/无功功率,以节点电压为状态变量,电网量测方程为<sup>[23]</sup>:

$$\begin{cases} V_i^m = V_i + e_{Vi}, \\ P_{ij}^m = V_i^2 (g_{si} + g_{ij}) - V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) + e_{Pij}, \\ Q_{ij}^m = -V_i^2 (b_{si} + b_{ij}) + V_i V_j (b_{ij} \cos \theta_{ij} - g_{ij} \sin \theta_{ij}) + e_{Qij}, \\ P_i^m = V_i \sum_{j \in i} V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + e_{Pi}, \\ Q_i^m = V_i \sum_{j \in i} V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + e_{Qi}. \end{cases} \quad (1)$$

式中:上标 m 表示量测量,下标  $i, j$  表示节点  $i$  和节点  $j$ ,下标  $ij$  表示支路  $ij$ ;  $V_i$  和  $V_i^m$  分别为节点  $i$  电压模值及其量测;  $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$  为支路  $ij$  两端节点电压相角差;  $P_{ij}^m$  与  $Q_{ij}^m$  分别为支路  $ij$  的有功与无功量测;  $P_i^m$  与  $Q_i^m$  分别为节点  $i$  注入有功和无功量测;  $g_{ij}$  和  $b_{ij}$  分别为支路  $ij$  的串联电导和电纳;  $g_{si}$  和  $b_{si}$  分别为节点  $i, j$  的对地电导和电纳;  $G_{ij}$  和  $B_{ij}$  分别为节点导纳矩阵中节点  $i, j$  对应的电导和电纳;  $j \in i$  表示与节点  $i$  直接连接的节点集合;  $e_{Vi}$ 、 $e_{Pij}$ 、 $e_{Qij}$ 、 $e_{Pi}$  与  $e_{Qi}$  分别表示下标量测量对应的量测误差。

记节点电压模值和相角分别为  $V = [V_1, \dots, V_{N_E}]^T$ 、 $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_{N_E-1}]^T$  (下标 E 表示电网,上标 T 表示转置,  $N_E$  为节点总数,平衡节点相角设为 0),则电网状态变量为  $x_E = [V^T, \theta^T]^T$ ,式(1)可记为

$$z_E = h_E(x_E) + e_E, \quad (2)$$

式中:  $h_E(\cdot)$  表示电网量测函数;  $z_E$  和  $e_E$  分别表示电网量测量及其误差向量。

### 1.2 水网的量测方程

#### 1.2.1 水网的元件模型

输配水网又称给水管网<sup>[30]</sup>(简称水网),主要包含管道、水泵等元件,用节点水头和支路流量来刻画其稳态水力特性。文中考虑圆管满流,管道沿程水头损失为

$$\Delta h_p = r q_p^n, \quad (3)$$

式中:下标 p 表示管道;  $\Delta h_p$  为管道两端节点的水头差;  $q_p$  为管道流量;  $r$  和  $n$  分别为管道摩阻系数和水力指数。

摩阻系数与管道材质、几何参数及水流流态等多个因素有关。采用 Darcy-Weisbach(D-W)公式时,  $n=2$ ,摩阻系数为

$$r = \frac{fl}{2gdA^2}, \quad (4)$$

式中:  $g$  为重力加速度;  $l$ 、 $d$  和  $A$  分别为管道的长度、内直径和断面面积;  $f$  为管道摩擦系数,取决于水流流态、管道粗糙度等多个因素。

目前,国内外学者提出了多种计算摩擦系数的方法,其中, Colebrook-White(C-W)公式是适用性及精度最高的公式之一,为

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon}{3.7d} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right), \quad (5)$$

式中:  $\varepsilon$  为管壁当量粗糙度;  $Re$  为雷诺数。

雷诺数是表征流态的重要参数,圆管满流的雷诺数计算为

$$Re = \frac{4q_p}{\pi v d}, \quad (6)$$

式中, $v$ 为水的运动粘滞系数。

C-W公式实质是关于摩擦系数的隐函数。为简化摩擦系数的计算,水力学分析中通常采用近似显函数<sup>[30]</sup>、Moody曲线<sup>[31]</sup>等方法。对于处于紊流态( $Re > 4\,000$ )的较光滑圆管满流,可用H-W公式来进一步简化计算<sup>[30]</sup>:

$$f = \frac{13.16gd^{0.13}}{C_{HW}^{1.852} q_p^{0.148}} \quad (7)$$

式中: $C_{HW}$ 为管道的H-W系数(与管道材料、老化程度、断面横截面积等参数有关的经验常数)。

基于H-W公式的管道水头损失为:

$$\Delta h_p = \frac{10.67l}{C_{HW}^{1.852} d^{4.87}} q_p^{1.852} \quad (8)$$

沿用式(3)的一般表达,则式(3)中 $n=1.852$ ,摩阻系数为:

$$r = \frac{10.67l}{C_{HW}^{1.852} d^{4.87}} \quad (9)$$

如前所述,现有关于水网及电-水耦合网络状态估计的研究大多采用H-W公式,而H-W公式的适用性有限,可能会影响状态估计的精度。为此,文中提出基于D-W公式的水网状态估计方法。考虑到状态估计对计算时间要求高而C-W公式的计算量较大,因此,笔者采用文献[32]的经验计算方法。

水泵通过增加水流压力来克服管道的摩擦阻力,是实现水流加压输送以满足用户水压需求的重要元件。文中采用以下扬程方程<sup>[32]</sup>来描述水泵的水力特性

$$\Delta h_u = a - bq_u^2, \quad (10)$$

式中:下标 $u$ 表示水泵; $\Delta h_u$ 为水泵扬程(水泵两端节点的水头差); $q_u$ 为水泵流量; $a$ 和 $b$ 分别为水泵关断水头和阻力系数,一般通过厂家提供的扬程曲线拟合得到。

### 1.2.2 水网的量测量及量测方程

与电网类似,输配水网同样通过水力SCADA系统来获取相关量测数据,典型量测包括节点水头、管道/水泵流量及节点注入流量<sup>[33]</sup>。以节点水头为状态变量,由管道方程(式(3))、水泵方程(式(10))及节点流量连续性定律,可得量测方程

$$\begin{cases} h_i^m = h_i + e_{hi}, \\ q_{p,ij}^m = \left( \frac{h_i - h_j}{r_{ij}} \right)^{1/n} + e_{p,ij}, \\ q_{u,ij}^m = \left( \frac{a_{u,ij} + h_i - h_j}{b_{u,ij}} \right)^{0.5} + e_{u,ij}, \\ q_i^m = \sum_{ij \in i^+} q_{p,ij} - \sum_{ki \in i^-} q_{p,ki} + \sum_{ij \in i^+} q_{u,ij} - \sum_{ki \in i^-} q_{u,ki} + e_{qi}. \end{cases} \quad (11)$$

式中: $h_i$ 和 $h_i^m$ 分别为水网节点 $i$ 水头及其量测; $q_{p,ij}$ 和 $q_{p,ij}^m$ 分别为管道 $ij$ (即首末节点为 $i$ 、 $j$ 的管道)流量及其量测; $r_{ij}$ 为管道 $ij$ 摩阻系数; $q_{u,ij}$ 和 $q_{u,ij}^m$ 分别为水泵 $ij$ 流量及其量测; $a_{u,ij}$ 和 $b_{u,ij}$ 分别为水泵 $ij$ 的水力参数; $q_i^m$ 为节点 $i$ 注入流量量测; $ij \in i^+$ 、 $ki \in i^-$ 分别表示以节点 $i$ 为起点及终点的支路集合; $e_{hi}$ 、 $e_{p,ij}$ 、 $e_{u,ij}$ 与 $e_{qi}$ 分别表示下标对应的量测误差。

需要特别指出,采用H-W公式时,式(11)中摩阻系数 $r_{ij}$ 为经验常数;而采用D-W公式时,由于 $r_{ij}$ 随管道流量变化,而管道流量是水头差的函数(参见式(3)~(6)),管道流量量测函数是关于管道两端节点水头的复杂函数。为简化状态估计模型同时兼顾状态估计的精度,基于文献[32]的经验计算方法,提出一种考虑摩阻系数修正的水网状态估计方法。

与电网类似,水网量测方程(式(11))同样可记为

$$z_w = h_w(x_w) + e_w, \quad (12)$$

式中:下标 W 表示水网; $\mathbf{x}_w = \mathbf{h} = [h_1, \dots, h_{N_w}]^T$  为水网水头向量,  $N_w$  为水网节点总数;  $\mathbf{h}_w(\cdot)$  表示水网量测函数;  $\mathbf{z}_w$  和  $\mathbf{e}_w$  分别表示水网量测量及其误差向量。

### 1.3 电-水耦合环节的量测方程

电力驱动水泵将电能转化为提升水头所需的机械能,是最主要的电-水耦合元件。水泵所消耗的功率<sup>[15]</sup>为

$$P_u = \frac{\rho g}{\eta_u} \Delta h_u q_u, \quad (13)$$

式中: $\rho$  为水的密度;  $\eta_u$  为水泵功率和效率。

显然,根据式(13)的电-水耦合关系,水泵流量及水头量测可参与电网的状态估计,而水泵功率量测也可参与水网的状态估计。文献[15]仅考虑前者,文中同时考虑 2 种情形,以充分利用耦合环节的量测信息。

假设水泵接入水网节点  $i, j$ , 由式(10)及(13),可构造如下水泵功率量测方程

$$P_{u,ij}^m = \frac{\rho g}{\eta_{u,ij}} \left[ a_{u,ij} \left( \frac{a_{u,ij} + h_i - h_j}{b_{u,ij}} \right)^{0.5} - b_{u,ij} \left( \frac{a_{u,ij} + h_i - h_j}{b_{u,ij}} \right)^{1.5} \right] + e_{Pu,ij}, \quad (14)$$

式中: $P_{u,ij}^m$  和  $e_{Pu,ij}$  分别为水泵  $ij$  的功率量测及其误差;  $\eta_{u,ij}$  为水泵  $ij$  的效率。

若水泵  $ij$  由电网节点  $k$  供电,则水泵功率以节点有功负荷形式参与节点  $k$  的有功功率平衡。文中以水泵流量与扬程的乘积(即  $q_u \Delta h_u$ ) 作为虚拟量测,则有

$$C_{uk}^m = -\frac{\eta_{u,ij}}{\rho g} V_k \sum_{j \in k} V_j (G_{kj} \cos \theta_{kj} + B_{kj} \sin \theta_{kj}) + e_{Ck}, \quad (15)$$

式中, $C_{uk}^m$  和  $e_{Ck}$  分别为水泵虚拟量测量及其误差。

设水泵  $ij$  的流量及水头量测为服从正态分布的独立随机变量,即  $q_u^m \sim N(\mu_q, \sigma_q^2)$ , 水头量测  $h_i^m \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 、 $h_j^m \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ , 则扬程  $\Delta h_u^m \sim N(\mu_j - \mu_i, \sigma_i^2 + \sigma_j^2)$ 。

以  $C_u = q_u \Delta h_u$  作为虚拟量测,则虚拟量测量的方差为

$$D(q_u \Delta h_u) = D(q_u) D(\Delta h_u) + D(q_u) E^2(\Delta h_u) + D(\Delta h_u) E^2(q_u), \quad (16)$$

式中, $E(\cdot)$  和  $D(\cdot)$  分别为期望和方差算子。

代入流量及扬程的均值和方差,有:

$$D(q_u \Delta h_u) = \sigma_q^2 (\sigma_i^2 + \sigma_j^2) + \sigma_q^2 (\mu_j - \mu_i)^2 + (\sigma_i^2 + \sigma_j^2) \mu_q^2. \quad (17)$$

取流量及水头表计量测精度作为标准差,并假设水泵量测水头量测表计的精度一致,则有  $\sigma_i = \sigma_j = \sigma_h$ ; 用流量/水头量测值来近似其期望,则虚拟量测量方差为:

$$D(q_u \Delta h_u) \approx 2\sigma_q^2 \sigma_h^2 + \sigma_q^2 (h_j^m - h_i^m)^2 + 2(\sigma_h q_u^m)^2. \quad (18)$$

显然,式(14)与(15)可记为

$$\mathbf{z}_{uP} = \mathbf{h}_{uP}(\mathbf{x}_w) + \mathbf{e}_{uP}, \quad (19)$$

$$\mathbf{z}_{uC} = \mathbf{h}_{uC}(\mathbf{x}_E) + \mathbf{e}_{uC}, \quad (20)$$

式中: $\mathbf{z}_{uP}$  和  $\mathbf{e}_{uP}$  分别表示水泵功率量测及其误差向量;  $\mathbf{z}_{uC}$  和  $\mathbf{e}_{uC}$  分别表示水泵虚拟量测量及其误差向量;  $\mathbf{h}_{uP}(\cdot)$  和  $\mathbf{h}_{uC}(\cdot)$  分别表示水泵功率及虚拟量测量对应的量测函数。

## 2 双线性最小二乘状态估计原理

### 2.1 加权最小二乘估计

电网、水网及电-水耦合系统的量测方程均可写为

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}, \quad (21)$$

式中: $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{z}$  和  $\mathbf{e}$  分别为状态变量、量测量及量测误差向量。

假设各量测量为服从正态分布且相互独立的随机变量,基于极大似然估计的状态估计等价于求解如下 WLS 问题<sup>[23]</sup>。

$$\min [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \mathbf{W} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})], \quad (22)$$

式中： $\mathbf{W}$ 为权重矩阵，通常取  $\mathbf{W} = \text{diag}\{\sigma_i^{-2}\}$  ( $\sigma_i$ 为第  $i$  个量测量的标准差， $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角阵)。

问题(22)可转化为如下正则方程的迭代求解<sup>[23]</sup>(通常称为高斯-牛顿法)

$$\mathbf{G}^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)} = [\mathbf{H}^{(k)}]^T \mathbf{W} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(k)})], \quad (23)$$

式中：上标( $k$ )表示第  $k$  次迭代； $\mathbf{H}$ 为  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ 的雅可比矩阵， $\mathbf{G} = \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}$ 称为增益矩阵； $\Delta \mathbf{x}$ 为  $\mathbf{x}$ 的修正量。显然，当  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ 为线性函数时， $\mathbf{G}$ 为常系数矩阵，求解正则方程无需迭代。

考虑电网/水网的零注入约束及电-水耦合方程时，状态估计建模为含等式约束的WLS问题，基于高斯-牛顿法同样可以转化为类似式(23)的正则方程的迭代求解，详见文献[23]。

## 2.2 双线性WLS估计

对于电网、水网或者电-水耦合系统，WLS估计本质上都是非线性非凸优化问题，应用高斯-牛顿法可能存在收敛问题及全局寻优困难。为此，文献[24]提出双线性WLS估计方法，其基本思想是通过设置辅助变量将非线性量测函数线性化，从而将非线性的WLS原问题转化为2个线性WLS问题的顺序求解。为简化表述，下面以不含等式约束的WLS问题为例说明双线性WLS估计的基本原理，等式约束双线性估计方法详见文献[25]。

假设通过引入适当的辅助变量和变换关系，原量测方程(21)可转化为

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{e}, \quad (24)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (25)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{e}_u, \quad (26)$$

式中： $\mathbf{y}$ 和  $\mathbf{u}$ 为辅助变量； $\mathbf{f}(\cdot)$ 为  $\mathbf{u}$ 和  $\mathbf{y}$ 之间的变换关系； $\mathbf{e}_u$ 为  $\mathbf{u}$ 的量测误差； $\mathbf{B}$ 和  $\mathbf{C}$ 分别表征  $\mathbf{z}$ 、 $\mathbf{y}$ 及  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{x}$ 之间线性变换关系的系数矩阵。

式(24)与式(26)为2组线性量测方程，式(25)为一组非线性变换。相应地，双线性估计包含以下3个阶段<sup>[24]</sup>。

1)以  $\mathbf{y}$ 为辅助状态变量，求解式(24)对应的线性WLS问题，得到  $\mathbf{y}$ 的估计值  $\hat{\mathbf{y}}$ ，即

$$\mathbf{G}_b \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{z}, \quad (27)$$

式中： $\mathbf{G}_b = \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B}$ 为式(24)对应的增益矩阵。可以证明， $\mathbf{y}$ 的协方差矩阵  $\text{cov}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}_b^{-1}$ 。

2)计算  $\mathbf{u}$ 的估计值  $\hat{\mathbf{u}}$ 及权重矩阵  $\mathbf{W}_u$ 为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{y}}), \\ \mathbf{W}_u = \text{cov}^{-1}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{F}}^{-T} \mathbf{G}_b \hat{\mathbf{F}}, \end{cases} \quad (28)$$

式中： $\mathbf{F}$ 为  $\mathbf{f}(\cdot)$ 的雅可比矩阵； $\hat{\mathbf{F}}$ 为  $\mathbf{F}$ 在  $\hat{\mathbf{y}}$ 处的取值。

3)以  $\mathbf{u}$ 为辅助量测量，求解式(26)对应的线性WLS问题，得到  $\mathbf{x}$ 的估计值  $\hat{\mathbf{x}}$ ，即

$$\mathbf{G}_c \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^T \mathbf{W}_u \hat{\mathbf{u}}, \quad (29)$$

式中： $\mathbf{G}_c = \mathbf{C}^T \mathbf{W}_u \mathbf{C}$ 为式(26)对应的增益矩阵。

对于含等式约束的WLS模型，应用双线性方法时需要引入辅助状态变量将等式约束线性化，并在上述3个阶段线性WLS估计及非线性变换中增广拉格朗日乘子。

## 3 电-水耦合系统量测方程的双线性化

双线性状态估计的关键在于量测方程的双线性化，即如何构造辅助变量  $\mathbf{y}$ 、 $\mathbf{u}$ 实现量测方程的线性化。关于电网的双线性化已有诸多研究<sup>[24-25]</sup>，以下重点说明水网及电-水耦合环节的双线性化方案。下文分别用下标E、W表示电网与水网对应的相关矩阵(例如，用  $\mathbf{y}_E$ 、 $\mathbf{y}_W$ 分别表示电网与水网对应的  $\mathbf{y}$ ，余类推)。

### 3.1 电网量测方程的双线性化

采用文献[24]的辅助变量设置方案，取

$$\begin{cases} K_{ij} = V_i V_j \cos \theta_{ij}, \\ L_{ij} = V_i V_j \sin \theta_{ij}, \\ U_i = V_i^2, \end{cases} \quad (30)$$

则有:  $\mathbf{y}_E = [\mathbf{U}^T, \mathbf{K}^T, \mathbf{L}^T]^T$  ( $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{L}$  分别为  $U_i$ 、 $K_{ij}$  和  $L_{ij}$  构成的列向量)。

需要指出,一般来说,  $\mathbf{y}_E$  的维度大于电网 WLS 原问题的状态变量  $\mathbf{x}_E = [\mathbf{V}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$ , 某些情况下可能影响状态估计的可观性, 这也是双线性估计方法的固有缺陷。

以节点电压平方的对数(即  $\alpha_i = 2 \ln V_i$ ) 及电压相角为电网状态变量(即  $\mathbf{x}_E = [\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$ ), 则可以按式(31)设置式(26)中的辅助量测向量  $\mathbf{u}_E$ 。

$$\begin{cases} \alpha_i = 2 \ln V_i, \\ \alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j, \\ \theta_{ij} = \theta_i - \theta_j, \end{cases} \quad (31)$$

则有:  $\mathbf{u}_E = [\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\alpha}_b^T, \boldsymbol{\theta}_b^T]^T$  ( $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\alpha}_b$  和  $\boldsymbol{\theta}_b$  分别为  $\alpha_i$ 、 $\alpha_{ij}$  和  $\theta_{ij}$  构成的列向量)。

可以证明:

$$\begin{cases} \alpha_i = \ln U_i, \\ \alpha_{ij} = \ln(K_{ij}^2 + L_{ij}^2), \\ \theta_{ij} = \arctan(L_{ij}/K_{ij}). \end{cases} \quad (32)$$

由式(32)可导出第二阶段所需  $\mathbf{u}_E$  与  $\mathbf{y}_E$  之间的非线性变换关系(即  $\mathbf{u}_E = \mathbf{f}(\mathbf{y}_E)$ )。

### 3.2 水网量测方程的双线性化

由水网量测函数(式(11)), 对管道和水泵支路  $ij$ , 分别设置辅助变量:

$$\begin{cases} M_{p,ij} = (h_i - h_j)^{1/n}, \\ N_{u,ij} = (a_{u,ij} + h_i - h_j)^{0.5}. \end{cases} \quad (33)$$

则式(11)转化为如下线性量测方程:

$$\begin{cases} h_i^m = h_i + e_{hi}, \\ q_{p,ij}^m = r_{ij}^{-1/n} M_{p,ij} + e_{p,ij}, \\ q_{u,ij}^m = b_{u,ij}^{-0.5} N_{u,ij} + e_{u,ij}, \\ q_i^m = \sum_{ij \in i^+} q_{p,ij} - \sum_{ki \in i^-} q_{p,ki} + \sum_{ij \in i^+} q_{u,ij} - \sum_{ki \in i^-} q_{u,ki} + e_{qi}. \end{cases} \quad (34)$$

因此, 取第一阶段水网的辅助状态向量  $\mathbf{y}_w = [\mathbf{h}^T, \mathbf{M}^T, \mathbf{N}^T]^T$  ( $\mathbf{h}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{N}$  分别为节点水头  $h_i$  及支路辅助变量  $M_{p,ij}$ 、 $N_{u,ij}$  构成的列向量), 即可将水网原始量测方程  $\mathbf{z}_w = \mathbf{h}_w(\mathbf{x}_w) + \mathbf{e}_w$  (式(12)) 转化为线性量测方程  $\mathbf{z}_w = \mathbf{B}_w \mathbf{y}_w + \mathbf{e}_w$  ( $\mathbf{B}_w$  为水网对应的  $\mathbf{B}$  矩阵)。文中以节点水头为水网状态变量  $\mathbf{x}_w$ , 取各支路水头差(即  $\Delta h_{ij} = h_i - h_j$ ) 形成辅助量测向量  $\mathbf{u}_w$  (即取  $\mathbf{u}_w = [\mathbf{h}^T, \Delta \mathbf{h}^T]^T$ ), 则  $\mathbf{u}_w$  与  $\mathbf{x}_w$  之间满足第三阶段所需的线性变换关系, 且由水网的节点-支路关联矩阵即可方便地获取式(26)中系数矩阵  $\mathbf{C}_w$ 。此外, 由式(33)可知, 管道和水泵的水头差分别满足:

$$\begin{cases} \Delta h_{p,ij} = M_{p,ij}^n, \\ \Delta h_{u,ij} = a_{u,ij} - N_{u,ij}^2. \end{cases} \quad (35)$$

由式(35)可导出第二阶段所需  $\mathbf{u}_w$  与  $\mathbf{y}_w$  之间的非线性变换关系。

不难发现, 双线性估计第一阶段以  $\mathbf{z}_w$  为量测、 $\mathbf{y}_w$  为辅助状态向量, 第三阶段以  $\mathbf{u}_w$  为辅助量测、 $\mathbf{x}_w$  为状态向量, 而常规 WLS 估计以  $\mathbf{z}_w$  为量测、 $\mathbf{x}_w$  为状态向量; 由于  $\mathbf{y}_w$  及  $\mathbf{u}_w$  的维度取决于水头测点数、支路流量测点数及节点流量测点关联的支路数, 其维度可能超过节点数, 导致双线性估计冗余度损失, 从而影响双线性估计的精度甚至可观性。后文将结合算例具体说明这一问题(参见 5.1.2 节)。

### 3.3 电-水耦合环节量测方程的双线性化

电-水耦合环节量测方程包含水泵功率量测方程(式(14))和虚拟量测方程(式(15))。其中, 虚拟量测方程本质上是节点功率方程, 按式(30)设置辅助变量即可实现量测方程的线性化。对于水泵功率量测方程, 在

辅助变量  $N_{u,ij}$  的基础上,进一步补充变量  $T_{u,ij}$ :

$$T_{u,ij} = (a_{u,ij} + h_i - h_j)^{1.5} \quad (36)$$

则式(14)转化为如下线性量测方程:

$$P_{u,ij}^m = \frac{\rho g}{\eta_{u,ij} b_{u,ij}^{0.5}} (a_{u,ij} N_{u,ij} - T_{u,ij}) + e_{P_{u,ij}} \quad (37)$$

与3.2节所述水网的线性化类似,取水泵水头差作为辅助量测量,则由式(36),有

$$\Delta h_{u,ij} = a_{u,ij} - T_{u,ij}^{2/3} \quad (38)$$

可见,式(35)第二式和式(38)即为电-水耦合环节辅助状态变量与辅助量测量之间的非线性变换关系。

需要指出,由于电-水耦合环节的量测方程并不独立构成状态估计模型,因此无须专门针对电-水耦合环节形成双线性状态估计所需的  $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{u}$ 。

## 4 电-水耦合系统状态估计的3种模式及其双线性估计方法

考虑电-水耦合系统不同的运行管理模式,文中提出分立估计、协同估计和联合估计3种状态估计模式。

### 4.1 分立估计

分立估计不考虑电网与水网之间的耦合关系,适用于电网与水网分立运行的传统模式。在该模式下,电网和水网分别独立进行状态估计,两者之间不进行数据交互。

根据电网和水网的量测方程(式(2)、式(12)),考虑零注入约束,分立估计模式下电网和水网的WLS估计模型分别为:

$$\begin{aligned} \min & [\mathbf{z}_E - \mathbf{h}_E(\mathbf{x}_E)]^T \mathbf{W}_E [\mathbf{z}_E - \mathbf{h}_E(\mathbf{x}_E)], \\ \text{s.t.} & \quad \mathbf{c}_E(\mathbf{x}_E) = \mathbf{0}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \min & [\mathbf{z}_W - \mathbf{h}_W(\mathbf{x}_W)]^T \mathbf{W}_W [\mathbf{z}_W - \mathbf{h}_W(\mathbf{x}_W)], \\ \text{s.t.} & \quad \mathbf{c}_W(\mathbf{x}_W) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (40)$$

式中:  $\mathbf{W}_E$  和  $\mathbf{W}_W$  分别为电网与水网量测量的权重矩阵;  $\mathbf{c}_E(\cdot)$  和  $\mathbf{c}_W(\cdot)$  分别对应零注入节点的节点功率和流量函数。

显然,式(39)与式(40)所示的WLS问题均可应用高斯-牛顿法(以下称为常规WLS估计)或者双线性估计方法进行求解。由于电网与水网独立估计,常规估计和双线性估计均可并行求解2个WLS问题。

采用双线性估计方法时,2个网络的基本计算步骤同式(27)~(29),此时只需根据3.1节与3.2节所述的电网/水网的双线性化方案,分别代入2个网络对应的系数矩阵  $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  及非线性变化关系  $\mathbf{f}(\cdot)$  进行3个阶段的计算即可。计算过程中,需要将零注入等式约束线性化(线性化方法与节点功率/流量量测方程相同),并在3个阶段的计算中增广拉格朗日乘子。

需要指出,对于水网状态估计,若采用H-W公式,管道摩阻系数为常数且流量量测方程形式较为直观(参见式(11)),但其适用性有限;采用D-W公式时,由于摩阻系数与雷诺数(管道流量)的函数关系,管道流量量测方程的形式将十分复杂。为简化水网状态估计的计算同时兼顾状态估计模型的精确性,笔者基于文献[32]的摩擦系数计算方法提出考虑摩阻系数修正的水网状态估计方法。以双线性状态估计为例,所提水网状态估计步骤如下。

步骤1:输入水网基础数据(包括管道/水泵数据、拓扑数据和量测数据等)及收敛精度  $\varepsilon$ ;按定压节点水头初始化各节点水头  $\mathbf{x}_W^{(k)}(k=0)$ 。

步骤2:根据管道直径、长度和H-W系数等基本数据,由式(9)按H-W公式计算管道摩阻系数  $r_{ij}$ 。

步骤3:由3.2节所述水网辅助变量  $\mathbf{y}_W$  和  $\mathbf{u}_W$  的设置方案,计算水网系数矩阵  $\mathbf{B}_W$ 、 $\mathbf{C}_W$ 。

步骤4:求解双线性估计第一阶段的线性WLS模型,即由(27)计算  $\mathbf{y}_W$  的估计值  $\hat{\mathbf{y}}_W$ 。

步骤5:进行双线性估计第二阶段的非线性变换,即由(28)计算  $\mathbf{u}_W$  的估计值  $\hat{\mathbf{u}}_W$  及权重矩阵  $\mathbf{W}_u$ 。

步骤6:求解双线性估计第三阶段的线性WLS模型,即由(29)解得水网各节点水头的估计值  $\hat{\mathbf{x}}_W$ 。

步骤7:若  $\|\hat{\mathbf{x}}_W - \mathbf{x}_W^{(k)}\|_\infty \leq \varepsilon$ ,则结束计算并转步骤10;否则,令  $k=k+1$ ,  $\mathbf{x}_W^{(k)} = \hat{\mathbf{x}}_W$ 。

步骤8:根据节点水头和管道摩阻系数  $r_{ij}$ ,由式(3)与式(6)计算管道流量及雷诺数。



步骤 9:应用文献[32]所述经验方法,根据管道雷诺数计算管道摩擦因子 $f_{ij}$ ,再由式(4)计算摩阻系数 $r_{ij}$ ,返回步骤 3。

步骤 10:输出水网状态估计结果。

由以上计算步骤可见,步骤 3~6 为双线性估计的计算步骤,而步骤 7~9 体现对管道摩阻系数的修正。因此,用高斯-牛顿法计算步骤替换步骤 3~6 即得到考虑摩阻系数修正的水网 WLS 估计方法,而去掉步骤 7~9,则退化为基于 H-W 模型的水网双线性估计方法。

## 4.2 协同估计

与分立估计类似,协同模式下电网和水网状态估计由各自的调度中心负责运行,区别在于该模式下 2 个网络会交互耦合环节信息。具体来说,水网向电网传递水泵虚拟量测量(流量与扬程量测乘积)及其方差,而电网向水网传递水泵功率量测及其方差。

协同估计模式下,电网量测方程包含电网原有量测方程(式(2))及水泵虚拟量测方程(式(20))构成,而水网量测方程由水网原有量测方程(式(12))及水泵功率量测方程(式(19))构成。因此,2 个网络的协同估计 WLS 模型分别为:

$$\begin{aligned} \min & \left[ \mathbf{z}_E - \mathbf{h}_E(\mathbf{x}_E) \right]^T \mathbf{W}_E \left[ \mathbf{z}_E - \mathbf{h}_E(\mathbf{x}_E) \right] + \left[ \mathbf{z}_{uc} - \mathbf{h}_{uc}(\mathbf{x}_E) \right]^T \mathbf{W}_{uc} \left[ \mathbf{z}_{uc} - \mathbf{h}_{uc}(\mathbf{x}_E) \right], \\ \text{s.t.} & \quad \mathbf{c}_E(\mathbf{x}_E) = \mathbf{0}; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \min & \left[ \mathbf{z}_W - \mathbf{h}_W(\mathbf{x}_W) \right]^T \mathbf{W}_W \left[ \mathbf{z}_W - \mathbf{h}_W(\mathbf{x}_W) \right] + \left[ \mathbf{z}_{up} - \mathbf{h}_{up}(\mathbf{x}_W) \right]^T \mathbf{W}_{up} \left[ \mathbf{z}_{up} - \mathbf{h}_{up}(\mathbf{x}_W) \right], \\ \text{s.t.} & \quad \mathbf{c}_W(\mathbf{x}_W) = \mathbf{0}。 \end{aligned} \quad (42)$$

式中: $\mathbf{W}_{uc}$ 为水泵虚拟量测量的权重(取为虚拟量测量方差的倒数); $\mathbf{W}_{up}$ 为水泵功率量测的权重。

可见,协同估计在分立估计 WLS 模型基础上扩展了与水泵相关的量测方程。当水泵缺乏流量和扬程量测时,电网协同估计模型(41)退化为分立估计模型(39);而当水泵缺乏功率量测时,水网协同估计模型(42)则退化为分立估计模型(40)。

与分立估计类似,同样可以采用常规 WLS 方法或者双线性估计方法进行协同估计。对于双线性协同估计方法,说明以下几点:

1)与电网分立估计模型(39)比较,协同估计模型(41)扩展了水泵虚拟量测方程(式(20))但不会引入新的辅助量测量和辅助状态变量, $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{u}$ 的设置同 3.1 节的 $\mathbf{y}_E$ 和 $\mathbf{u}_E$ 。

2)与水网分立估计模型(40)比较,协同估计模型(42)扩展了水泵功率量测方程(式(37))并引入新的辅助状态变量 $T_{u,j}$ ,因此需要对 3.2 节所述水网辅助状态向量 $\mathbf{y}_W$ 进行扩展,取 $\mathbf{y}_W = [\mathbf{h}^T, \mathbf{M}^T, \mathbf{N}^T, \mathbf{T}^T]^T$ ( $\mathbf{T}$ 为 $T_{u,j}$ 构成的列向量), $\mathbf{u}$ 的设置同 3.2 节的 $\mathbf{u}_W$ 。

3)对水网进行协同估计时,若考虑管道摩阻系数的修正,同样可采用与上述方案类似的迭代修正策略。

需要特别指出,文献[15]本质上也是电-水耦合系统的协同状态估计,但该文需要根据水网状态估计结果计算水泵功率并传递给电网,顺序求解水网与电网的状态估计。与文献[15]不同,文中的协同估计仅需要传递水泵量测信息,电网和水网的状态估计仍可并行处理,提高了状态估计的效率。此外,文献[15]仅考虑在电网状态估计中利用水泵量测数据,而文中通过电网与水网量测方程的扩展,实现了水泵量测数据的双向利用,特别是当水网缺乏水泵相关量测时,由电网向水网传递水泵功率量测数据将有利于提高水网量测的冗余度并提升水网状态估计的性能。

## 4.3 联合估计

联合估计适用于电-水耦合系统由统一调度中心负责运行的场景,是电网与水网的一体化估计。统一调度中心同时接收 2 个网络的量测数据,联合估计的 WLS 模型为:

$$\begin{aligned} \min & \left[ \mathbf{z}_E - \mathbf{h}_E(\mathbf{x}_E) \right]^T \mathbf{W}_E \left[ \mathbf{z}_E - \mathbf{h}_E(\mathbf{x}_E) \right] + \left[ \mathbf{z}_W - \mathbf{h}_W(\mathbf{x}_W) \right]^T \mathbf{W}_W \left[ \mathbf{z}_W - \mathbf{h}_W(\mathbf{x}_W) \right], \\ \text{s.t.} & \quad \begin{cases} \mathbf{c}_E(\mathbf{x}_E) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_W(\mathbf{x}_W) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_{EW}(\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_W) = \mathbf{0}。 \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

式中,  $c_{ew}(\cdot)$ 表示电-水耦合约束, 对应式(13)的水泵功率方程。

与分立估计和协同估计相比, 联合估计将水泵功率方程作为等式约束, 能够保证状态估计结果严格满足电-水耦合关系(即获得全局一致解), 但联合估计模型的问题规模显著增大。

与分立估计和协同估计类似, 同样可以采用常规WLS方法或者双线性估计方法求解联合估计模型。对于双线性联合估计, 说明以下几点:

1) 根据3.3节所述电-水耦合环节量测方程的线性化方法, 借助电网辅助变量( $U_i$ 、 $K_{ij}$ 和 $L_{ij}$ )和水泵辅助变量( $N_{u,ij}$ 和 $T_{u,ij}$ ), 即可实现耦合函数 $c_{ew}(\cdot)$ 的线性化。由于 $T_{u,ij}$ 仅与水泵功率方程关联, 双线性估计需要补充水泵功率量测方程(式(37))作为联合估计的虚拟量测方程, 即此时式(43)中的 $z_w$ 扩展为 $[z_w^T, z_{up}^T]^T$ 。

2) 联合估计的辅助变量 $y$ 和 $u$ 分别由3.1节和3.2节所述电网和水网对应的辅助变量构成, 即 $y = [y_E^T, y_W^T]^T$ ,  $u = [u_E^T, u_W^T]^T$ 。

3) 由于电网与水网的辅助变量并无关联, 因此, 双线性估计的第二与第三阶段可以实现电网与水网的解耦计算。

4) 当考虑修正管道摩阻系数时, 修正方法与分立和协同估计并无区别, 但这2种估计模式只需要迭代求解水网的估计模型, 而联合估计则需要同时对电网双线性WLS估计的第一阶段进行求解, 计算时间可能大幅增加。

## 5 算例分析

用11节点水网、IEEE-14节点电网<sup>[34]</sup>与11节点水网耦合形成的电-水耦合系统、IEEE-118节点电网<sup>[34]</sup>与2个11节点水网耦合形成的电-水耦合系统3个不同规模算例验证文中双线性状态估计方法的有效性。11节点水网算例接线图及其与IEEE-14节点电网的耦合关系如图1(a)(图中1和[1]分别表示节点1及支路1, 下同), IEEE-118节点电网与2个水网的耦合关系如图1(b)所示。算例详细数据参见文献[35]。

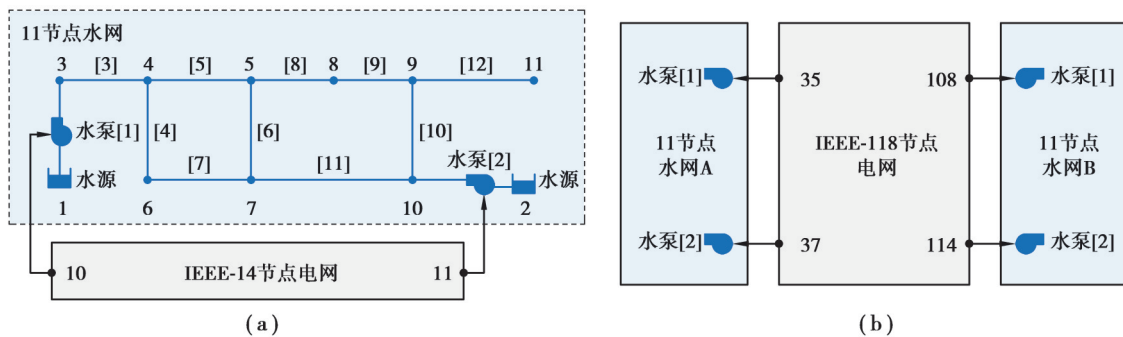


图1 算例系统接线图

Fig. 1 Topology of the sample systems

以3个算例的潮流解作为量测真值(水网潮流通过水力分析软件EPANET<sup>[32]</sup>求解), 在潮流真值上叠加量测误差(均值为0, 标准差已知的正态分布随机变量)形成量测值。通过蒙特卡罗抽样产生量测值样本, 用以下统计指标表征状态估计的精度:

$$S_M = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{z_{i,t} - z_i^*}{\sigma_i} \right)^2}, \quad (44)$$

$$S_E = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\hat{z}_{i,t} - z_i^*}{\sigma_i} \right)^2}. \quad (45)$$

式中:  $T$ 为蒙特卡罗样本总数(文中取 $T=3\ 000$ );  $m$ 为测点总数(即量测向量 $z$ 的维度); 下标 $i$ 、 $t$ 分别对应第 $i$ 个测点、第 $t$ 个样本;  $z_i^*$ 和 $\sigma_i$ 分别为测点 $i$ 的真值和标准差;  $z_{i,t}$ 和 $\hat{z}_{i,t}$ 分别为测点 $i$ 在第 $t$ 个样本中的量测值和估计值( $\hat{z}_{i,t} = h_{i,t}(\hat{x})$ )。

可见,  $S_M$ 和 $S_E$ 分别表示量测误差和估计误差的统计值。对于正常的量测系统和状态估计, 有 $S_M \approx 1$ ,  $S_E < 1$ ;

若  $S_E/S_M < 1$ , 表明通过状态估计减小了测点的误差, 实现了状态估计的滤波目的, 且比值越小, 滤波效果越好<sup>[23]</sup>。

### 5.1 算例 1: 11 节点水网

算例 1 验证管道摩阻系数修正对水网状态估计结果的影响及所提水网双线性估计方法的有效性。

#### 5.1.1 修正管道摩阻系数的影响

假设算例 1 全部节点均配置水头及流量量测、全部支路均配置流量量测(即全量测配置); 取水头、支路流量及节点流量量测的标准差分别为 0.1 m、0.001 m<sup>3</sup>/s 及 0.003 m<sup>3</sup>/s。以文献[35]负荷为基荷, 考虑基荷和高负荷(负荷流量为基荷的 5 倍) 2 种工况, 应用文中双线性方法对算例 1 进行状态估计。2 种工况的状态估计指标如表 1 所示。其中, “管道摩阻系数取为常数” 相当于采用 H-W 管道方程。

表 1 2 种工况的状态估计指标

Table 1 State estimation indices of the two operating scenarios

工况	指标	摩阻系数取为常数	修正摩阻系数
基荷	$S_M$	0.997	0.997
	$S_E$	0.571	0.520
	$S_E/S_M$	0.572	0.522
高负荷	$S_M$	0.996	0.996
	$S_E$	<b>31.909</b>	0.568
	$S_E/S_M$	<b>32.037</b>	0.570

由表 1 可见, 在基荷情形下, 是否修正管道摩阻系数对状态估计指标的影响不大。在高负荷情形下, 若摩阻系数依然取为常数, 则  $S_E$  及  $S_E/S_M$  指标均显著大于 1 (见表 1 中下划线数据), 状态估计未取得滤波效果, 这是因为 H-W 方程的适用性有限, 当管道流量较大时, 常数摩阻系数无法准确刻画管道的水力特性; 此时, 若按文中方法对管道摩阻系数进行修正, 则可以有效降低  $S_E$  及  $S_E/S_M$  指标, 保证状态估计的滤波效果。

表 1 结果表明, 为保证水网状态估计对工况的适应性有必要修正管道摩阻系数, 同时验证了文中按经验方法修正管道摩阻系数的有效性。

#### 5.1.2 双线性 WLS 估计与常规 WLS 估计的对比

1) 不同量测配置(冗余度)下的估计精度。

考虑全量测(方案 1)和非全量测(方案 2, 图 1(a)中水网仅奇数号节点配置节点流量量测、奇数号管道配置流量量测, 其余量测同方案 1) 2 种配置方案, 量测量标准差同 5.1.1 节。分别应用常规 WLS 估计和文中所提双线性 WLS 估计对算例 1 进行状态估计, 常规方法以水头量测值作为初值(对于无水头量测节点, 根据定压节点水头按一定水头差设置初值), 2 种方法均考虑管道摩阻系数的修正。2 种方法的状态估计指标及平均计算时间如表 2 所示, 表中冗余度取量测数与状态变量数的比值<sup>[24]</sup>。

由表 2 可见, 在 2 种量测配置方案下, 双线性 WLS 估计的冗余度均明显低于常规 WLS 估计, 但 2 种方法的  $S_E/S_M$  指标均小于 1, 表明双线性 WLS 估计和常规 WLS 估计均能有效实现滤波; 计算时间方面, 文中方法较常规方法减少约 25%, 计算效率提升明显。进一步对比估计精度可见, 方案 1 中双线性估计的精度略优于 WLS 估计, 表明在全量测配置下, 双线性 WLS 估计中冗余度下降对估计精度的影响不大; 与方案 1 比较, 随着量测量减少, 方案 2 下 2 种方法的  $S_E/S_M$  指标均有不同程度增大, 而双线性 WLS 方法指标的增幅更大, 表明双线性 WLS 方法的估计精度受量测配置的影响更大。

为进一步对比 2 种方法的估计精度, 按式(46)计算第  $t$  个样本的节点水头估计误差。

$$\varepsilon_t = \frac{1}{N_w} \sum_{i=1}^{N_w} \frac{|\hat{h}_i - h_i^*|}{h_i^*}, \quad (46)$$

式中,  $\hat{h}_i$  和  $h_i^*$  分别为节点  $i$  水头的估计值和真值。3 000 次抽样所得  $\varepsilon_t$  的概率密度及累积密度曲线如图 2 所示。

表2 2种量测方案的状态估计指标及计算时间

Table 2 State estimation indices and solution times under the measuring schemes

量测配置	指标	常规WLS估计	双线性WLS估计(文中方法)
方案1	冗余度	3.560	1.52(第一阶段)/2.33(第三阶段)
	$S_M$	0.997	0.997
	$S_E$	0.540	0.535
	$S_E/S_M$	0.542	0.537
	计算时间/s	0.044	0.033
方案2	冗余度	2.450	1.29(第一阶段)/1.89(第三阶段)
	$S_M$	0.995	0.995
	$S_E$	0.621	0.735
	$S_E/S_M$	0.624	0.739
	计算时间/s	0.044	0.034

注:计算环境为CPU Intel(R) Core(TM) i5-11260H 2.6GHz, 16GB内存笔记本及Matlab 2019b。

由图2可见,方案1中2种方法的概率密度和累积分布都非常接近,最大估计误差( $\epsilon$ 的最大值)小于0.6%,绝大多数样本的估计误差小于0.4%(60%以上样本的误差小于0.22%);与方案1比较,2种方法的估计精度有不同程度下降,其中,2种方法的最大估计误差增加到0.8%,常规方法60%样本所对应的估计误差为0.32%,而文中方法的这一指标为0.34%,再次证明量测量减少对文中方法精度的影响更大。

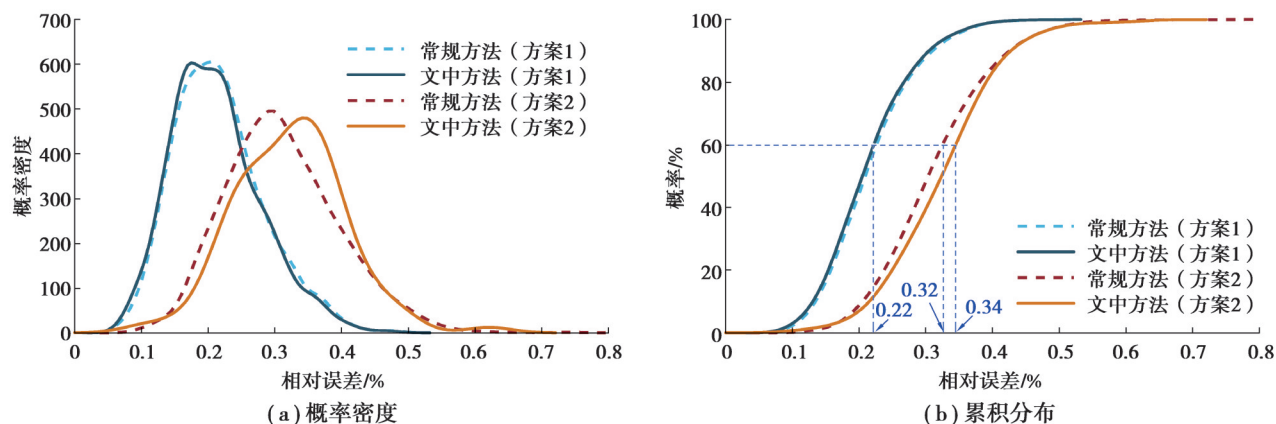


图2 节点水头估计误差的概率密度与累积分布曲线

Fig. 2 Probability density and cumulative distribution curves of water heads estimation errors

2)对小流量工况的适应性。

当水网中部分管道流量较小时,以节点水头为状态变量的水力学分析可能因为雅可比矩阵条件数过大而导致收敛困难<sup>[22]</sup>。文中双线性WLS估计方法同样以节点水头为状态变量,为分析文中方法对小流量工况的适应性,以算例1基荷工况为基础,将节点11的负荷减小到1/10。在全量测配置(量测量标准差同5.1.1节)下,2种方法3000次抽样所得状态估计指标如表3所示。

表3 小流量工况下2种方法的估计指标

Table 3 State estimation indices of the two methods under the low-flowing scenario

方法	收敛样本		有效滤波样本		$S_E/S_M$ 均值
	样本数目	样本占比/%	样本数目	样本占比/%	
常规WLS估计	570	19	21	0.7	1.742
双线性WLS估计(文中方法)			2994	99.8	0.552

由表 3 可见,小流量工况下,常规 WLS 方法的收敛性明显恶化,3 000 个样本中仅 570 个样本收敛,而其中有效滤波( $S_E/S_M < 1$ )样本仅有 21 个(占比 0.7%);文中方法将非线性 WLS 估计问题转化为线性问题,无需迭代求解(不存在收敛性问题),且仅有 6 个样本未实现有效滤波,估计性能较常规方法有明显提升。

## 5.2 算例 2:IEEE-14 节点电网+11 节点水网

本节以电-水耦合系统为算例,验证所提双线性估计方法对电-水耦合系统的适应性,并对分析 3 种估计模式对耦合系统状态估计精度及可观性的影响。

### 5.2.1 3 种模式的状态估计指标

假设电网中各节点配置注入有功及无功量测、偶数号节点配置电压量测、偶数号支路配置首端有功和无功量测、奇数号支路配置末端有功和无功量测;取电压和功率量测的标准差(标幺值)分别为 0.005 和 0.010。水网中各支路配置流量量测、奇数号节点配置水头量测和注入流量量测,各量测量标准差同 5.1.1 节。

考虑管道摩阻系数修正,应用双线性估计方法对算例 2 分别进行分立估计、协同估计和联合估计。3 种模式下,分别统计电网与水网的状态估计指标;此外,分别根据电网与水网的估计结果计算水泵功率,用两者之差来表示水泵功率估计偏差,取 2 台水泵功率偏差的最大值来表征电-水耦合环节的不匹配程度。3 种模式的指标及平均计算时间如表 4 所示。

表 4 算例 2 中 3 种估计模式的估计指标及计算时间

估计模式	网络	$S_M$	$S_E$	$S_E/S_M$	水泵最大功率偏差/kW	计算时间/s
分立	电网	0.996	0.597	0.599	48.877	0.043
	水网	0.995	0.654	0.657		
协同	电网	0.996	0.559	0.561	11.417	0.061
	水网	0.995	0.642	0.645		
联合	电网	0.996	0.564	0.566	9.605	0.087
	水网	0.995	0.641	0.644		

由表 4 可见,文中的双线性方法能有效实现 3 种模式的状态估计,验证了文中方法对电-水耦合系统状态估计的适应性。此外,3 种模式的  $S_E/S_M$  指标、水泵功率偏差和计算时间均有明显差别,具体说明如下。

从  $S_E/S_M$  指标来看,与分立估计比较,协同估计和联合估计模式下电网和水网的  $S_E/S_M$  指标均有明显下降,表明协同估计和联合估计均有利于提升电网和水网的状态估计精度。此外,对比协同估计与联合估计可见,水网的估计精度相当,但电网联合估计的精度有所下降。

从水泵功率偏差来看,由于分立估计模式下电网和水网不交换电-水耦合环节的相关数据,水泵功率偏差最大。协同估计模式下电网与水网交互虚拟量测与功率量测,联合估计模式将水泵功率方程作为状态估计的等式约束,2 种模式均能大幅降低水泵功率偏差,从而提升电-水耦合环节的数据一致性。

从计算时间来看,分立估计、协同估计和联合估计的用时依次增加,这是因为分立估计优化问题的规模最小,联合估计的规模最大,而协同估计的问题规模居中。由于 3 种估计均采用双线性方法,且联合估计第二与第三阶段可实现电网与水网的解耦计算,因此,3 种模式的计算时间相差并不大。

### 5.2.2 3 种模式对可观性的影响

在 5.2.1 节量测量基础上,取消电网节点 10(水泵[1]的供电节点)的电压和注入功率量测,以及与节点 10 关联所有支路的功率量测,取消水泵[2]及其关联支路[11]的流量量测和节点 7 的水头量测,其余量测配置及标准差同 5.2.1 节。应用文中的双线性方法对电-水耦合系统进行状态估计,3 种模式的状态估计指标如表 5 所示。

经可观性分析可知,电网节点 10 和水泵[2]网侧节点(水网节点 10)均不可观测,因此,无法通过分立估计对电网和水网进行状态估计。协同模式下,水网向电网传递水泵[1]的虚拟量测,相当于补充了电网节点 10 的注入有功量测,而电网向水网传递水泵[2]的功率量测,相当于补充了与水泵[2]流量和网侧节点(节点 10)水头有关的量测,因此,协同模式下电网和水网均可观测。联合估计将 2 台水泵的功率方程作为等式约束,

相当于同时扩展了电网节点10与水泵[2]与耦合系统状态变量的关联关系,同样使电网和水网可观测。

表5 部分量测取消情形下的估计指标

Table 5 State estimation indices with some measurements unavailable

指标	分立估计		协同估计		联合估计	
	电网	水网	电网	水网	电网	水网
$S_M$	0.994	0.996	0.994	0.996	0.994	0.996
$S_E$			0.565	0.664	0.569	0.662
$S_E/S_M$			0.568	0.667	0.572	0.664

需要特别指出,文献[15]的方法将水泵功率传递给电网,同样可以改善电网的可观性;但文献[15]缺乏电网到水网的反向数据传递,水网仍不可观。文中考虑了电网与水网之间数据的双向传递,可以同时改善电网和水网的可观性。

### 5.3 算例3:IEEE-118节点电网+2个11节点水网

假设算例3中IEEE-118节点电网中各节点配置注入有功量测与电压量测、各支路配置首端有功和无功量测,电压和功率量测的标准差同5.2节;水网A中各节点配置水头量测和注入流量量测、奇数号支路配置流量量测(水头、支路流量及节点流量量测的标准差分别为0.1 m、0.01 m<sup>3</sup>/s及0.03 m<sup>3</sup>/s);水网B中仅在奇数号节点处配置水头量测,其余量测配置及量测标准差同水网A。应用文中双线性方法对算例3进行状态估计,3种模式的估计指标及计算时间如表6所示。

表6 算例3中3种估计模式的估计指标及计算时间

Table 6 State estimation indices and solution times of Sample 3 for the three estimation modes

估计模式	网络	$S_M$	$S_E$	$S_E/S_M$	水泵最大功率偏差/kW	时间/s
分立	电网	0.999	0.631	0.631		
	水网A	0.997	0.595	0.597	54.772	0.042
	水网B	0.996	0.622	0.625		
协同	电网	0.999	0.627	0.628		
	水网A	0.997	0.568	0.570	31.758	0.059
	水网B	0.996	0.580	0.583		
联合	电网	0.999	0.628	0.629		
	水网A	0.997	0.556	0.558	23.178	0.153
	水网B	0.996	0.564	0.566		

由表6可见,3种模式下双线性WLS估计方法均能有效实现电网和2个水网的状态估计,验证了文中方法对较大规模电-水耦合系统状态估计的适应性。

从 $S_E/S_M$ 指标和水泵功率偏差来看,与分立估计比较,协同估计和联合估计下电网及2个水网的 $S_E/S_M$ 指标有不同程度降低,而水泵功率偏差明显减小,这些结果与算例2类似,再次验证协同估计和联合估计有利于提升电网和水网的估计精度,以及电-水耦合环节的数据一致性(且联合估计在改善水网估计精度、提升数据一致性方面具有更明显的优势)。

从计算时间来看,3种模式下双线性方法均能快速实现算例3的状态估计,与常规WLS(分立估计和协同估计用时0.770 s,联合估计用时2.612 s)比较,双线性估计的用时低于WLS估计的8%,计算效率优势较为明显。此外,对比算例2(见表4)的计算时间可见,分立模式和协同模式的计算时间略有增加,而联合模式的时间增幅较大,这是因为分立估计和协同估计只需要分别修正2个水网的摩阻系数,而联合估计的迭代修正流程要求2个水网同时满足收敛条件时才停止迭代,导致估计时间增加;总体来说,对不同规模算例,双线性方法的计算时间变化不大,在计算效率上表现出良好的适应性。

## 6 结 论

文中提出考虑管道摩阻系数的水网双线性估计方法,并进一步考虑电-水耦合系统的分立运行、协同运行和联合运行 3 种不同模式,提出电-水耦合系统的双线性估计方法。用 11 节点水网及其与 IEEE-14 节点、IEEE-118 节点电网耦合形成的电-水耦合系统验证了文中双线性估计方法的有效性。算例结果表明:

1) 为保证状态估计对水网工况的适应性,有必要在状态估计中考虑管道摩阻系数的修正。

2) 与常规 WLS 估计方法比较,文中双线性估计方法具有计算效率高且对小流量水网适应性好的突出优势。

3) 文中所提协同估计和联合估计均有助于改善电网和水网的状态估计精度,对电-水耦合环节的数据一致性和耦合网络的可观性有一定提升效果。

## 参考文献

- [ 1 ] 孙宏斌,郭庆来,吴文传,等. 面向能源互联网的多能流综合能量管理系统:设计与应用[J]. 电力系统自动化, 2019, 43(12): 122-128, 171.  
Sun H B, Guo Q L, Wu W C, et al. Integrated energy management system with multi-energy flow for energy Internet: design and application[J]. Automation of Electric Power Systems, 2019, 43(12): 122-128, 171. (in Chinese)
- [ 2 ] 臧海祥,耿明昊,黄蔓云,等. 电-热-气混联综合能源系统状态估计研究综述与展望[J]. 电力系统自动化, 2022, 46(7): 187-199.  
Zang H X, Geng M H, Huang M Y, et al. Review and prospect of state estimation for electricity-heat-gas integrated energy system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2022, 46(7): 187-199. (in Chinese)
- [ 3 ] 董今妮,孙宏斌,郭庆来,等. 面向能源互联网的电-气耦合网络状态估计技术[J]. 电网技术, 2018, 42(2): 400-408.  
Dong J N, Sun H B, Guo Q L, et al. State estimation of combined electric-gas networks for energy Internet[J]. Power System Technology, 2018, 42(2): 400-408.(in Chinese)
- [ 4 ] Zang H X, Geng M H, Huang M Y, et al. Asynchronous and adaptive state estimation of integrated electricity-gas energy systems[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2023, 10(9): 7636-7644.
- [ 5 ] Xu D L, Xu J J, Wu Z J, et al. A real-time state estimation framework for integrated energy system considering measurement delay[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2022, 16(14): 2891-2902.
- [ 6 ] Zang H X, Geng M H, Xue M F, et al. A robust state estimator for integrated electrical and heating networks[J]. IEEE Access, 2019, 7: 109990-110001.
- [ 7 ] Sheng T T, Yin G X, Guo Q L, et al. A hybrid state estimation approach for integrated heat and electricity networks considering time-scale characteristics[J]. Journal of Modern Power Systems and Clean Energy, 2020,8(4): 636-645.
- [ 8 ] 董今妮,孙宏斌,郭庆来,等. 热电联合网络状态估计[J]. 电网技术, 2016(6): 1635-1641.  
Dong J N, Sun H B, Guo Q L, et al. State estimation for combined electricity and heat networks[J]. Power System Technology, 2016(6): 1635-1641. (in Chinese)
- [ 9 ] Du Y X, Zhang W, Zhang T T. ADMM-based distributed state estimation for integrated energy system[J]. CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2019, 5(2): 275-283.
- [ 10 ] 刘鑫蕊,李垚,孙秋野,等. 基于多时间尺度的电-气-热耦合网络动态状态估计[J]. 电网技术, 2021, 45(2): 479-488.  
Liu X R, Li Y, Sun Q Y, et al. Interaction and joint state estimation of electric-gas-thermal coupling network[J]. Power System Technology, 2021, 45(2): 479-488. (in Chinese)
- [ 11 ] Xiang X Z, Jia S F. China's water-energy nexus: assessment of water-related energy use[J]. Resources, Conservation and Recycling, 2019, 144:32-38.
- [ 12 ] 赵霞,孙名轶,李欣怡,等. 面向区域综合能源服务的电-水联合潮流[J]. 电力自动化设备, 2020, 40(12): 23-30.  
Zhao X, Sun M Y, Li X Y, et al. Combined load flow of integrated electricity-water system for regional multi-energy service[J]. Electric Power Automation Equipment, 2020, 40(12): 23-30. (in Chinese)
- [ 13 ] Zamzam A S, Dall'Anese E, Zhao C, et al. Optimal water-power flow problem: formulation and distributed optimal solution[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018,6(1): 37-47.
- [ 14 ] 宋仕恒,穆云飞,孟宪君,等. 面向分布式电源消纳的配电网-配水网经济调度方法[J]. 电力系统自动化, 2019, 43(11): 95-103.

- Song R H, Mu Y F, Meng X J, et al. Joint economical dispatch method of power distribution network and water distribution system for distributed generator accommodation [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2019, 43(11): 95-103. (in Chinese)
- [15] Moazeni F, Khazaei J, Mitra P. An integrated state-estimation framework for interdependent water and energy systems[J]. *Journal of Hydrology*, 2020, 590(125393).
- [16] Tshela K S, Hamam Y, Abu-Mahfouz A M. State estimation in water distribution network: a review[C]//2017 IEEE 15th International Conference on Industrial Informatics (INDIN). IEEE, 2017: 1247-1252.
- [17] Sterling M J H, Bargiela A. Minimum norm state estimation for computer control of water distribution systems[J]. *IEE Proceedings D: Control Theory and Applications*, 1984, 131(2): 57-63.
- [18] Fusco F, Arandia E. State estimation for water distribution networks in the presence of control devices with switching behavior [J]. *Procedia Engineering*, 2017, 186:592-600.
- [19] Arsene C T C, Gabrys B. Mixed simulation-state estimation of water distribution systems based on a least squares loop flows state estimator[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, 38(2): 599-619.
- [20] Cheng W P, Yu T C, Xu G. Real-time model of a large-scale water distribution system[J]. *Procedia Engineering*, 2014, 89: 457-466.
- [21] Andersen J H, Powell R S. Implicit state-estimation technique for water network monitoring[J]. *Urban Water*, 2000, 2(2): 123-130.
- [22] Bargiela A. On-line monitoring of water distribution networks[D]. Durham, North East England, UK: Durham University, 1984.
- [23] 陈艳波, 于尔铿. 电力系统状态估计[M]. 北京: 科学出版社, 2021.  
Chen Y B, Yu E K. Power system state estimation[M]. Beijing: Science Press, 2021. (in Chinese)
- [24] Gomez-Exposito A, Gomez-Quiles C, de la Villa Jaen A. Bilinear power system state estimation[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2012, 27(1): 493-501.
- [25] Gómez-Quiles C, Gil H A, de la Villa Jaen A, et al. Equality-constrained bilinear state estimation[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2013, 28(2): 902-910.
- [26] Chen Y B, Ma J, Liu F, et al. A bilinear robust state estimator[J]. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 2016, 26(7): 1476-1492.
- [27] 陈艳波, 马进. 一种双线性抗差状态估计方法[J]. *电力系统自动化*, 2015(6): 41-47.  
Chen Y B, Ma J. A bilinear robust state estimation method for power systems[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2015, 39(6): 41-47. (in Chinese)
- [28] 郑顺林, 刘进, 陈艳波, 等. 基于加权最小绝对值的电-气综合能源系统双线性抗差状态估计[J]. *电网技术*, 2019, 43(10): 3733-3744.  
Zheng S L, Liu J, Chen Y B, et al. Bilinear robust state estimation based on weighted least absolute value for integrated electricity-gas system [J]. *Power System Technology*, 2019, 43(10): 3733-3742. (in Chinese)
- [29] 陈艳波, 姚远, 杨晓楠, 等. 面向电-热综合能源系统的双线性抗差状态估计方法[J]. *电力自动化设备*, 2019, 39(8): 47-54.  
Chen Y B, Yao Y, Yang X N, et al. Bilinear robust state estimation method for integrated electricity-heat energy systems[J]. *Electric Power Automation Equipment*, 2019, 39(8):47-54. (in Chinese)
- [30] 严煦世, 刘遂庆. 给水排水管网系统[M]. 3版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014.  
Yan X S, Liu S Q. Water supply and drainage network system[M]. 3rd ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 2014. (in Chinese)
- [31] Mays L W. Water resources engineering[M]. 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011.
- [32] Rossman L A. EPANET 2 user's manual[J]. Laboratory Office of Research & Development U.S. Environmental Protection Agency, 2000, 19(1):115-118.
- [33] Abraham E, Stoianov I. Sparse null space algorithms for hydraulic analysis of large-scale water supply networks[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2016, 142(3): 4015058.1.
- [34] Zimmerman R D, Murillo-Sanchez C E. Matpower 7.1 user's manual[J]. Power Systems Engineering Research Center, 2011.
- [35] Cui J X. 11 node WDN[EB/OL][2023-02-21]. [https://www.researchgate.net/publication/368667053\\_11nodeWDN](https://www.researchgate.net/publication/368667053_11nodeWDN).