

用矩阵位移法计算桁架结构支座反力的简便方法

王达淦, 文国治

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘要:利用矩阵位移法计算桁架结构常需计算其支座反力。按桁杆轴力计算桁架结构支座反力需根据支座结点连于桁架结构的末结点或始结点判别正负号, 不方便计算, 而直接按矩阵位移法中单元杆端力的正负号约定推得的桁架支座反力计算公式则无此问题, 既便于教学运用, 又可有效简化程序编制。

关键词:桁架; 支座反力; 矩阵位移法

中图分类号: TU311.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-2909(2012)02-0083-04

矩阵位移法是有限元法应用在杆件结构计算时常采用的方法, 也是土木工程专业本科生必须掌握的基本方法之一。利用矩阵位移法计算桁架结构时, 常常在求出桁架中各杆件的轴力后, 还需计算桁架的支座反力。在不少教材中使用的桁架支座反力计算公式并不方便使用, 文章根据矩阵位移法的约定, 重新推导了的桁架支座反力计算公式, 有效简化了旧有公式, 使之更方便适用。

下面以计算空间桁架支座反力为例, 说明传统约定和矩阵位移法约定在桁架反力计算上的差别。

一、以桁架轴力计算桁架支座反力需分始末两端判别正负号

设矩阵位移法的整体坐标系如图 1 所示, 且以其为参照的某空间桁架的全部桁杆轴力已解出, 并约定该桁架铰支座的反力正方向与整体坐标系一致时为正。现取连于桁架中任一支座 A 的任一单元①, 其轴力为 F_N , 按照传统约定, 沿该单元外法线方向标出力矢量, 如图 1 所示。

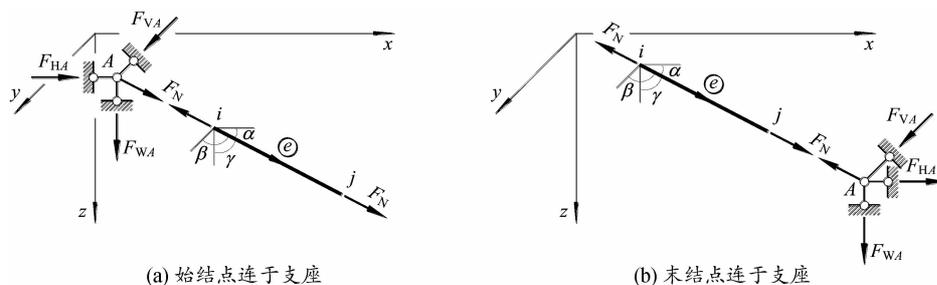


图 1 基于传统约定的桁杆轴力与反力的关系

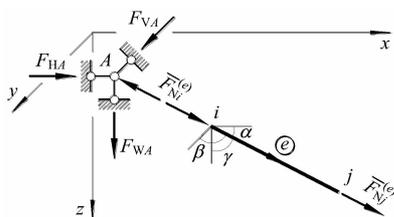
根据参考文献[1]和[2]可知支座 A 的支座反力计算公式为

收稿日期: 2011-09-18

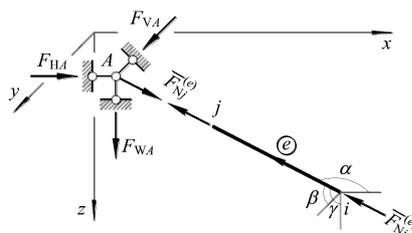
作者简介: 王达淦(1977-), 男, 重庆大学土木工程学院讲师, 主要从事结构力学研究, (E-mail) wwdq@yeah.net。

$$\begin{cases} F_{HA} = \sum_{(e)} \pm F_N \cos\alpha - F_{Px} \\ F_{VA} = \sum_{(e)} \pm F_N \cos\beta - F_{Py} \\ F_{WA} = \sum_{(e)} \pm F_N \cos\gamma - F_{Pz} \end{cases} \quad (a)$$

式中： F_{HA} 、 F_{VA} 和 F_{WA} 分别为支座A沿整体坐标 x 、 y 和 z 方向的支座反力； α 、 β 和 γ 分别是单元坐标轴 $\bar{x}^{(e)}$ （图1中标于单元上的箭头为其方向）相对于 x 、 y 和 z 轴的方位角； $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 分别是 $\bar{x}^{(e)}$ 轴对 x 、 y 和 z 轴方向的余弦； F_{Px} 、 F_{Py} 和 F_{Pz} 分别为直接作用于支座A上，沿整体坐标 x 、 y 和 z 方向的结点荷载。



(a) 始结点连于支座



(b) 末端点连于支座

图2 基于矩阵位移法约定的桁杆轴力与反力的关系

现设始结点 i 连于支座A，单元坐标轴 $\bar{x}^{(e)}$ 的方向余弦均为正（即 $\bar{x}^{(e)}$ 轴沿第一象限延伸），如图2(a)所示可得

$$\begin{cases} F_{HA} = \bar{F}_{Ni}^{(e)} \cos\alpha \\ F_{VA} = \bar{F}_{Ni}^{(e)} \cos\beta \\ F_{WA} = \bar{F}_{Ni}^{(e)} \cos\gamma \end{cases} \quad (c)$$

而当末端点 j 连于支座A，如图2(b)所示。推导式(c)时，所得公式中本应带有负号，但考虑到方位角 α 、 β 和 γ 已由第一象限角变为第三象限角（即 $\bar{x}^{(e)}$ 轴沿第七象限延伸），因此，该负号实际已隐含于方向余弦中，进而

$$\begin{cases} F_{HA} = \bar{F}_{Nj}^{(e)} \cos\alpha \\ F_{VA} = \bar{F}_{Nj}^{(e)} \cos\beta \\ F_{WA} = \bar{F}_{Nj}^{(e)} \cos\gamma \end{cases} \quad (d)$$

从式(c)和式(d)可见，支座反力已与所连的单元结点是始结点 i 还是末端点 j 无关，因此，两式可合写为式(c)。如果再考虑到数个单元同时与支座相连，以及支座承受结点荷载的情况，最终可得

$$\begin{cases} F_{HA} = \sum_{(e)} \bar{F}_{Ni}^{(e)} \cos\alpha - F_{Px} \\ F_{VA} = \sum_{(e)} \bar{F}_{Ni}^{(e)} \cos\beta - F_{Py} \\ F_{WA} = \sum_{(e)} \bar{F}_{Ni}^{(e)} \cos\gamma - F_{Pz} \end{cases} \quad (e)$$

式(a)中，若桁杆末端点 j 连于支座A，如图1(b)，则被求和项取正号；若始结点 i 连于支座A，如图1(a)，则取负号。求和符号“ \sum ”表示如果连于支座A的桁杆不止一根时，需对每一根桁杆先判断符号后，再求和。显然，这一过程并不便于实际计算。

二、以桁架杆端内力计算桁架支座反力可统一计算方法

设推导前的已知条件同前。根据矩阵位移法的约定，桁架单元 \textcircled{e} 的杆端力分为始结点杆端力 $\bar{F}_{Ni}^{(e)}$ 和末端点杆端力 $\bar{F}_{Nj}^{(e)}$ ，它们与桁杆轴力 F_N 的关系为

$$\bar{F}_{Ni}^{(e)} = -F_N, \bar{F}_{Nj}^{(e)} = F_N \quad (b)$$

对于 $\bar{x}^{(e)}$ 轴沿其他象限延伸的情况，以及平面桁架支座反力的计算，式(e)亦均适用。

三、桁架支座反力计算流程图和算例

(一) 桁架支座反力计算流程图

现将按式(a)和式(e)计算所对应的流程图分别绘于图3(a)和(b)中。

(二) 算例

以图4(a)所示平面桁架支座结点3的反力 F_{H3} 和 F_{V3} 的计算为例，说明公式(e)的使用方法。该桁架为平面桁架，因此 $\cos\beta = \sin\alpha$ ， $\cos\gamma = 0$ 。离散化及各杆轴力，如图4(a)所示。

为求得两个方向上的支座反力，取支座结点3及其相关为单元隔离体，如图4(b)所示。单元 $\textcircled{2}$ 和 $\textcircled{3}$ 的杆端力为 $\bar{F}_{N3}^{(2)} = -21.97 \text{ kN}$ 、 $\bar{F}_{N3}^{(3)} = -24.11 \text{ kN}$ 。再分别计算两单元同 x 轴的夹角 $\alpha^{(2)} = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{13}} = 2.159 \text{ rad}$ ， $\alpha^{(3)} = 2\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = 5.820 \text{ rad}$ 。

因此，方向余弦为 $\cos\alpha^{(2)} = \cos 2.159 = -0.5547$ ， $\cos\beta^{(2)} = \sin\alpha^{(2)} = \sin 2.159 = 0.8321$ ， $\cos\alpha^{(3)} = \cos 5.820 = 0.8944$ ， $\cos\beta^{(3)} = \sin\alpha^{(3)} = \sin 5.820 = -0.4472$ 。

将以上各轴力和方向余弦值代入式(e)，可得：

$$F_{H3} = \bar{F}_{N3}^{(2)} \cos\alpha^{(2)} + \bar{F}_{N3}^{(3)} \cos\alpha^{(3)} = (-21.97) \times (-0.5547) + (-24.11) \times 0.8944 = -9.376 \text{ kN}$$

$$F_{V3} = \bar{F}_{N3}^{(2)} \cos\beta^{(2)} + \bar{F}_{N3}^{(3)} \cos\beta^{(3)} = (-21.97) \times 0.8321 + (-24.11) \times (-0.4472) = -7.500 \text{ kN}$$

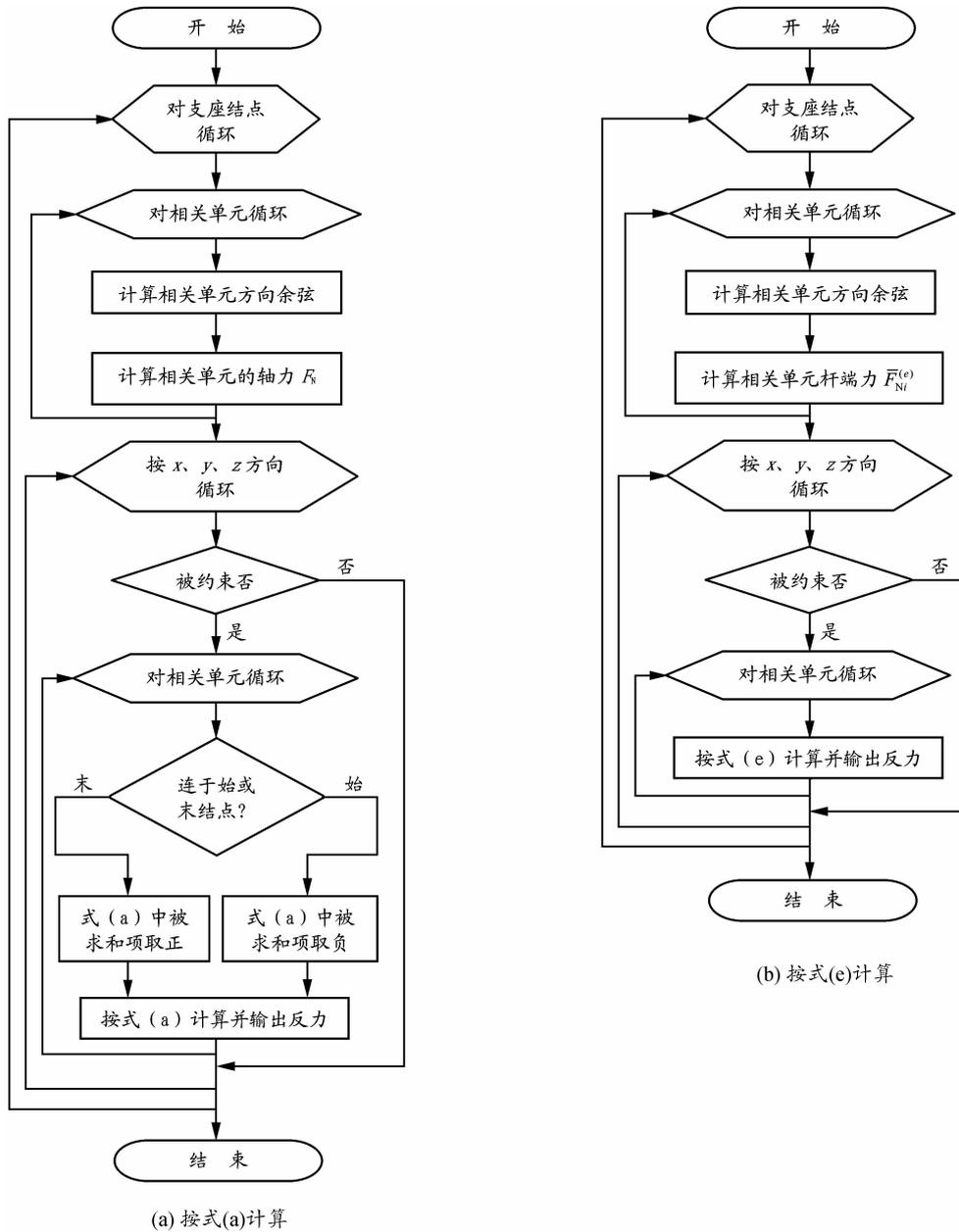


图3 桁架支座反力计算程序流程图

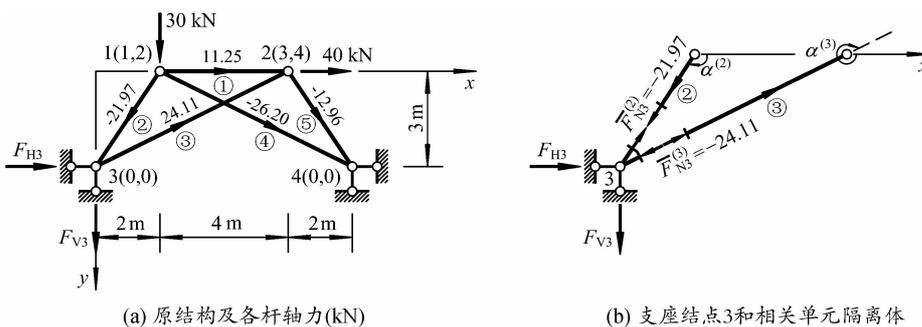


图4 算例

四、结语

式(a)按照传统轴力正负号约定推得,被不少教

材使用,但使用过程中需判断连于支座的结点是单元的始结点还是末结点,以确定被求和项的符号。

这一判断过程增加了手算的繁杂程度,也导致程序编制时必须使用判断语句,增加了代码的长度。

而式(e)的推导完全遵循矩阵位移法约定,能将符号隐入公式中。这既方便了计算,也可缩减代码。同时,利用式(e)编制的程序,能在求支座反力时,再次利用前期算得的桁杆杆端力变量。

综上所述,矩阵位移法的约定自成一体,严格遵照这一约定可以避免传统桁架支座反力计算过程中繁杂的判断步骤,从而提升教学效率。

参考文献:

- [1] 匡文起,张玉良,辛克贵. 结构矩阵分析和程序设计[M]. 北京:高等教育出版社,1991.
- [2] 赵更新. 土木工程结构分析程序设计[M]. 北京:中国水利水电出版社,2002.
- [3] 文国治,李正良. 结构分析中的有限元法[M]. 武汉:武汉理工大学出版社,2010.

A simple solution of truss reactions with matrix displacement method

WANG Da-quan, WEN Guo-zhi

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China)

Abstract: A truss' reactions often need to be solved after the structure is calculated by matrix displacement method. It is inconvenience that the rational solution based on the truss axial force needs to determine the sign of sum terms according to whether the beginning joint or the ending joint is connected to the support. But if the convention is changed to matrix displacement method, a new reaction formula based on element-end forces can be deduced and efficiently solve the deficiency, and then, can also decrease the complication in teaching and programming.

Keywords: truss; reactions; matrix displacement method

(编辑 梁远华)