

# 拱桥与吊桥悬链线方程比较

包立新, 邹毅松

(重庆交通大学 土木建筑学院, 重庆 400074)

**摘要:**在桥梁工程课程教学中,拱桥主拱圈和吊桥主缆的悬链线方程的推导是教学难点之一。在教材中,这两部分内容是在不同章节里逐一讲解,教学效果较差,而且缺乏对这两种悬链线方程的比较,学生难以理解。文章从拱桥和吊桥的受力特点出发,对这两种悬链线方程进行了推导和剖析,通过比较分析帮助学生深刻理解其内容,提高学生运用力学知识解决桥梁工程的实际问题,增强学习兴趣。

**关键词:**拱桥;吊桥;悬链线方程;桥梁工程

**中图分类号:**TU279.7+2;G642.0 **文献标志码:**A **文章编号:**1005-2909(2012)04-0059-03

在桥梁工程教学中,拱桥部分在拱桥计算章节里讲述,分析拱桥主拱圈在恒载作用下的3种不同的合理拱轴线,即圆弧线、抛物线和悬链线。桥梁工程拱桥部分对主拱圈合理拱轴线选用悬链线方程进行了详细推导,其推导过程是学习的难点。同样,在悬索桥教学中,悬索桥主缆线型方程在空缆时也为悬链线方程,其推导过程也是学习的难点。教学中由于课堂时间的限制,授课的时间不同,且由不同教师讲授,没有剖析这两种方程的不同点。对这两种方程推导过程进一步剖析,帮助学生理解,从辨别、分析中学习,提高学生独立思考的能力。

## 一、拱桥主拱圈悬链线方程的推导

**基本假设:**自重作用下主拱圈任意截面弯矩为零,只承受轴向压力;拱上填料及主拱圈材料均匀一致;自重恒载沿水平方向呈线性连续分布<sup>[1-2]</sup>。

以上假定可以在图1坐标系下,得出如下结论。

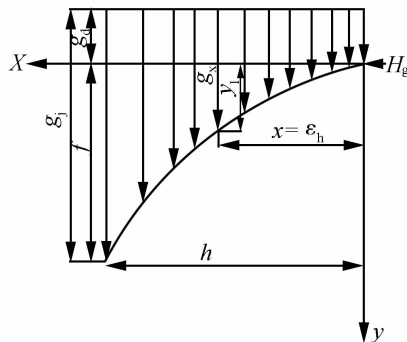


图1 悬链线方程拱圈受力图

收稿日期:2012-03-25

基金项目:重庆市高等教育教学改革研究项目(103140);中国交通教育研究会教育科学研究课题(交教研1002-93)

作者简介:包立新(1968-),男,重庆交通大学土木建筑学院副教授,博士,主要从事桥梁工程和大跨度桥梁结构分析研究,(E-mail)1819341823@qq.com。

$$H_g = \frac{\sum M_j}{f} \quad (1)$$

$$y_1 = \frac{M_x}{H_g} \quad (2)$$

式中:  $\sum M_j$  为半拱恒载对拱脚截面的力矩;  $H_g$  为拱的恒载水平推力(不考虑弹性压缩);  $f$  为拱的计算矢高;  $M_x$  为任意截面以右的全部恒载对该截面的弯矩值;  $y_1$  为以拱顶截面为坐标原点, 拱轴线上任意点的竖向坐标。

由假定(3)有:

$$g_x = g_d + \gamma y_1 \quad (3)$$

式中:  $g_x$  为  $x$  截面处恒载集度;  $g_d$  为拱顶处恒载集度;  $\gamma$  为拱上材料容重(为一常数)。

当  $y_1 = f$  时:

$$g_j = g_d + \gamma f \quad (4)$$

式中:  $g_j$  为拱脚截面恒载集度。

$$\text{令 } m = \frac{g_j}{g_d} \text{ 则}$$

$$\gamma = \frac{g_j - g_d}{f} = \frac{g_d}{f}(m - 1) \quad (5)$$

式中:  $m$  为拱轴系数。

对(2)式进行两次求导得:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{1}{H_g} \frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{g_x}{H_g} \quad (6)$$

令  $x = l_1 \varepsilon$ , 并将(3)代入(6)得:

$$\frac{d^2 y_1}{d\varepsilon^2} = \frac{l_1^2 g_d}{H_g} [1 + (m - 1) \frac{y_1}{f}] \quad (7)$$

令  $k^2 = \frac{l_1^2 g_d}{H_g f} (m - 1)$ , 则(6)式的解为:

$$y_1 = \frac{f}{(m - 1)} (\text{ch} k \varepsilon - 1) \quad (8)$$

式(8)即为图1坐标下合理拱轴线一般方程, 当

$x = l_1$ 、 $\varepsilon = 1$ 、 $y_1 = f$  有:

$$\text{ch} k = m, \text{ 即 } k = \text{ch}^{-1} m = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$$

实际上设计中总是先确定一个  $m$  值, 再根据方程(8)确定拱轴线坐标, 再由式(1) - (4)求解在拱圈任意截面的内力。

从以上推导过程看: 若要获得一个有合理拱轴线的拱, 只要把拱桥设计成一个实腹式的悬链线拱即可。然而事实上不可能做到这一点, 这是为什么呢? 因为拱轴线方程的建立与推导均是基于以上的3个假定, 其中假定(2)要保持拱上填料与主拱圈材料均匀一致, 一般来说拱上填料的容重较拱圈材料的容重轻; 另外, 假定(3)要求保证所有恒载自重沿水平方向呈线性分布, 实际工程中只有在跨径小于

20 m 的小跨拱桥中才做成实腹式的, 有可能实现这一假定, 对于大跨拱桥(跨径大于 20 m)做成空腹式更经济<sup>[3]</sup>。实际工程设计中一般不满足假定的(2)、(3)两个条件, 无法获得一条理想的合理拱轴线(只受压, 不受弯)。但是事实上拱桥的主拱圈是可以承担一定的弯矩的, 我们不必找到一条只受压的拱轴线, 设计出的桥梁才更经济、适用, 只要拱圈材料强度满足规范要求即可。拱上填料与拱圈材料有所不同, 即使跨径小于 20 m 的拱桥可以用同一种材料形成, 也很难保证恒载集度呈线性变化。对一些更小跨径的拱桥或涵洞来说, 采用圆弧拱而没有采用悬链线拱是为了更方便施工, 受力上也完全满足要求。

工程应用中, 安全与经济因素应并重, 这就迫使大跨度拱桥采用空腹式, 只有小跨径拱桥或涵洞才采用实腹式, 拱轴线也没有刻意追求合理拱轴线。

在吊桥的教学中还会遇上另外一种形式的悬链线, 即主缆自重作用下的悬链线方程。

## 二、悬索桥主缆悬链线方程的推导

基本假设: 索是柔性的, 忽略其自身的抗弯刚度; 索在弹性范围内工作, 满足虎克定律; 忽略加劲梁自身的抗弯刚度<sup>[4-5]</sup>。

根据以上假定, 在图2的坐标系下, 如果忽略索的伸长对索自重集度的影响, 则索的悬链线方程推导如下。

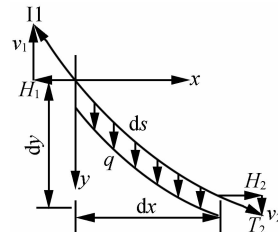


图2 主缆微元段自重作用下受力图

由力的平衡条件可得:

$$\sum x = 0 \quad H_1 = H_2 = H \quad (9)$$

$$\sum y = 0 \quad dv = v_2 - v_1 = -q \cdot ds,$$

$$\text{即 } \frac{dv}{dx} = -\frac{ds}{dx} \cdot q \quad (10)$$

由几何条件可得:

$$v_1 = H \cdot \frac{ds}{dx}, \quad ds = \sqrt{(dy)^2 + (dx)^2} \quad (11)$$

将(11)代入(10)得:

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + q \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0 \quad (12)$$

两次积分, 并引入边界条件:  $x = 0$  时,  $y = 0$ ;  $x = l$  时,  $y = c$  得

$$y = \frac{H}{q} \left[ \text{ch} \alpha - \text{ch} \left( \frac{2\beta \cdot x}{l} - \alpha \right) \right] \quad (13)$$

$$\alpha = \text{sh}^{-1} \left[ \frac{\beta(c/L)}{\text{sh}\beta} \right] + \beta, \quad \beta = \frac{ql}{2H} \quad (14)$$

$$S = \frac{2H}{q} \text{sh}\beta \text{ch}(\alpha - \beta), \quad \Delta S = \frac{(HS/L)^2}{EA},$$

$$S_0 = S - \Delta S \quad (15)$$

$$V_1 = H \cdot \text{sh}\alpha \quad V_2 = \frac{q}{2}(c \cdot \text{cth}\beta - 1) \quad (16)$$

式中: $q$ 为索沿弧长方向的每延米自重,忽略有应力时引起的改变; $L$ 为主缆跨径; $c$ 为主缆两端的高差; $EA$ 为主缆轴向刚度; $S$ 为主缆索长; $S_0$ 为主缆无应力索长。

从以上推导看,吊桥主缆的受力与拱桥拱圈的受力刚好相反。在竖向力作用下,主缆产生水平拉力,拱圈产生水平压力。这就决定了二者使用的材料不同。拱圈可以用抗压强度高、强度高的圬工材料,而悬索桥的主缆常由抗拉强度高的高强钢丝组成。高强钢丝本身也只能承受拉力,而不能承受压力和弯矩。所以悬索桥主缆线型是通过本身重量沿弧长方向均匀分布推导出来,与拱桥假定的沿水平方向恒载集度呈线性分布不一样,得出的方程表达形式也不一样,尽管它们都称之为悬链线方程。在工程应用中主缆的悬链线方程是真实存在的,而主拱的合理拱轴线是不存在的。但是,悬索桥主缆在吊索及自身重量的共同作用下最终是一条组合曲线—分段悬链线,即在两吊杆之间为悬链线,在吊杆处有尖点,组合曲线在此处不可导。

### 三、结语

拱桥悬链线拱轴线方程是基于竖向荷载沿水平方向呈线性分布而得出的,其实际拱圈是可以承担弯矩的,是压弯构件,实际拱桥压力线与选用的合理拱轴线(可以是悬链线)不重合,这既保证拱圈的安全,也可以使设计的拱桥更经济、美观。

悬索桥的主缆是悬链线方程是基于竖向荷载沿着弧向呈均匀分布而得出的,其实际线型是分段悬链线,主缆是在两吊杆之间的悬链线是真实存在的,主缆只承拉力,不能承受弯矩。

学生可以自己推导出:在沿水平方向呈均布的荷载作用下,拱圈与主缆的线型是一样的,都是二次抛物线。学生运用力学、数学知识解决工程问题,增加了对桥梁工程学习的兴趣。

### 参考文献:

- [1] 顾懋清,石绍甫. 拱桥[M]. 北京:人民交通出版社,1996.
- [2] 周水兴. 桥梁工程[M]. 2版. 重庆:重庆大学出版社,2011.
- [3] 邹昀,王中华,华渊. 土木工程专业课程体系的改革和实践[J]. 高等建筑教育,2007,16(3):72-74.
- [4] H. M. Irvine. Structure of Cables[M]. Cambridge, Massachusetts, and London, England: The MIT Press, 1984.
- [5] PREM KRISHNA. Cable - suspended roofs[M]. New York: McGraw - Hill Book Company, Louis, 1978.

## Comparison of two catenary equations of arch bridge and suspension bridge

BAO Lixin, ZOU Yisong

(School of Civil Engineering and Architecture, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P. R. China)

**Abstract:** In the teaching of bridge engineering, the catenary equation deduction of the main arch circle of arch bridge and the main push-towing rope of suspension bridge is one of difficulty. This part of content is explained one by one in different chapter, is less effective, and lack of the comparison between the two catenary equations, student is hard to understand. With the stress characteristic of this two bridge types, the paper analyses the two catenary equations to help the students understand this part of content and improve the students' ability solving actual problem with mechanics knowledge of bridge engineering, strengthen learning interest.

**Keywords:** arch bridge; suspension bridge; catenary equation; bridge engineering

(编辑 詹燕平)