doi:10.11835/j. issn. 1005 - 2909. 2013. 03. 017

利用位移互等定理改进的超静定结构位移计算方法

王达诠,文国治
(重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

摘要:结构力学中,超静定结构的位移计算常使用单位荷载法,即利用超静定的实际位移状态与虚拟单位力状态相配的传统方法计算位移。该方法用于计算承受复杂荷载的超静定结构时,计算工作量巨大。利用位移互等定理改进的单位荷载法——位移互等算法,将原结构承受的荷载作用于静定的任一力法基本结构上所得的状态,与作用于原结构的虚拟单位力状态相配计算位移。由于荷载转为作用在静定基本结构上,有效降低了计算工作量。该方法在结构力学教学中有一定的实际应用价值,为师生提供了一种可选的新方法,丰富了结构力学的教学内容。

关键词:互等定理;位移;单位荷载法;超静定结构
中图分类号:G642.0;TU311.3 **文献标志码**:A **文章编号**:1005-2909(2013)03-0064-04

结构力学中,一般采用单位荷载法计算结构指定截面的位移,计算时需针对所求位移假设虚拟单位力状态,从而利用虚力原理求得实际位移状态中指定截面的位移。该方法亦可用于超静定结构的位移计算,虚拟单位力既可以施加在原超静定结构(后简称原结构)上,也可以施加在原结构的任一力法基本结构(后简称基本结构)上[1-2]。后一种方法由于只需解算一次原超静定结构的内力,即实际位移状态中原结构的内力,而被更广泛地采用。例如,求解图 1(a)中的竖向位移 Δ_K,则虚拟单位力状态既可选为图 1(b)所示状态,也可选为图 1(c)所示状态,而取后者,解算更简单。

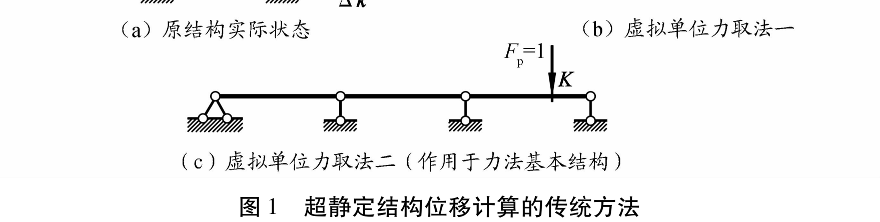

图 1 超静定结构位移计算的传统方法

收稿日期:2012 - 10 - 12
作者简介:王达诠(1977 -),男,重庆大学土木工程学院讲师,硕士,主要从事结构力学研究,(E - mail) wwwdq@ yeah. net。

一、位移互等算法的证明

利用图1(a)中的结构加以说明。如图2(a)所示,将图1(a)中原结构的荷载作用于图1(c)所示的基本结构上,记作状态 T;再取图1(b)的虚拟单位力状态(重绘于图2(b)中,记作状态 S)与之匹配,来应用单位荷载法。现需证明:按这一方法求得的位移就是实际位移。

将单位化后的荷载 F_1(记作 $\bar{F}_1$)单独作用于原结构上,如图2(c)所示。此时,$\bar{F}_1$ 引起的 K 截面竖向位移记作 δ_{S1}。根据位移互等定理,该位移应等于状态 S 中对应 F_1 作用方向上的位移 δ_{1S},即 $\delta_{1S} = \delta_{S1}$。

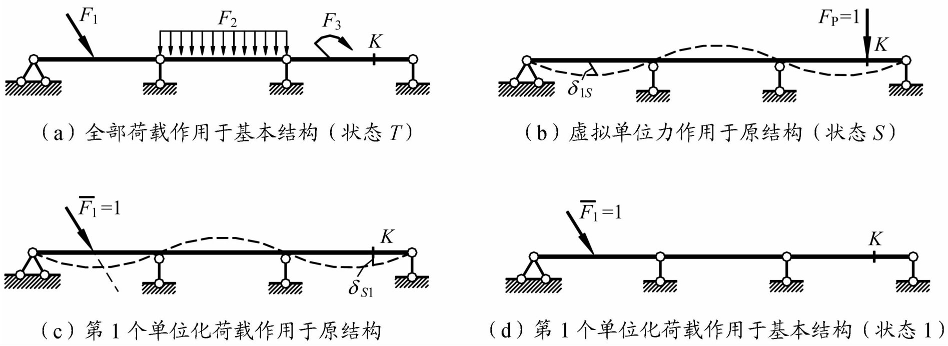

图2　位移互等算法的证明

为求得 δ_{1S},应假设虚拟单位力状态。而求 δ_{1S} 使用的广义荷载正是 $\bar{F}_1$,于是可将其作用于图1(c)所示的静定基本结构上,如图2(d)所示,形成虚拟单位力状态与状态 S 相配。至此,$\bar{F}_1$ 已转换作用于基本结构上,记此状态为状态1。

根据线弹性的物理条件,由 F_1 单独作用所引起的 K 截面的竖向位移 $\Delta_{K1} = F_1\delta_{S1}$,再将位移互等定理代入,可得 $\Delta_{K1} = F_1\delta_{1S}$。推而广之,对于单独作用于原结构的任一荷载,均可将之单位化后,作用于基本结构上。若记相应状态为状态 $i(i=1,2,\cdots)$,可得 $\Delta_{Ki} = F_i\delta_{Si} = F_i\delta_{iS}$。

再利用叠加法,可求得 K 截面竖向位移为

$$\Delta_K = \sum_i \Delta_{Ki} = \sum_i F_i\delta_{Si} = \sum_i F_i\delta_{iS}, \qquad (1)$$

式中,F_i 表示单独作用于原结构上的第 i 个荷载;Δ_{Ki} 表示 F_i 单独作用于原结构时,引起的 K 截面的竖向位移;δ_{iS} 表示状态 S 中施加于 K 处的单位荷载,所引起的原结构第 i 个荷载作用方向上的广义位移。

δ_{iS} 的计算使用前述传统的单位荷载法,对于杆件结构,其计算公式为

$$\delta_{iS} = \sum\int\frac{\bar{M}_iM_S}{EI}ds + \sum\int\frac{\bar{F}_{Ni}F_{NS}}{EA}ds + \sum\int\frac{\mu\bar{F}_{Qi}F_{QS}}{GA}ds, \qquad (2)$$

式中,$\bar{M}_i$、$\bar{F}_{Ni}$ 和 $\bar{F}_{Qi}$ 分别代表状态 i 中的弯矩、轴力和剪力;M_S、F_{NS} 和 F_{QS} 分别代表状态 S 中的弯矩、轴力和剪力;EI、EA 和 GA 分别代表各杆段的抗弯刚度、轴向刚度和剪切刚度;μ 表示剪应力分布不均匀系数;ds 代表在杆段上所取的微段。式中的积分符号代表对单根段积分,而求和符号则代表对结构中的全部杆段求和。

将式(b)代入式(a)并去单位化,再运用积分运算与求和运算的加法结合律,则式(a)变为

$$\Delta_K = \sum_i F_i\delta_{iS} = \sum_i\left[F_i\left(\sum\int\frac{\bar{M}_iM_S}{EI}\mathrm{d}s + \sum\int\frac{\bar{F}_{Ni}F_{NS}}{EA}\mathrm{d}s + \sum\int\frac{\mu\bar{F}_{Qi}F_{QS}}{GA}\mathrm{d}s\right)\right] = \sum_i\left(\sum\int\frac{M_iM_S}{EI}\mathrm{d}s + \sum\int\frac{F_{Ni}F_{NS}}{EA}\mathrm{d}s + \sum\int\frac{\mu F_{Qi}F_{QS}}{GA}\mathrm{d}s\right) = \sum\int\left(\frac{M_S}{EI}\sum_i M_i\right)\mathrm{d}s + \sum\int\left(\frac{F_{NS}}{EA}\sum_i F_{Ni}\right)\mathrm{d}s + \sum\int\left(\frac{\mu F_{QS}}{GA}\sum_i F_{Qi}\right)\mathrm{d}s, \qquad (3)$$

而由叠加法可知,式(3)中的 $\sum_i M_i$、$\sum_i F_{Ni}$ 和 $\sum_i F_{Qi}$ 正是状态 T 的内力。

式(1)表明了该方法求得的位移与传统方法相等,而式(3)的得出证明了利用状态 T 和状态 S 相配就可求得所需的位移,至此证明完毕。

二、位移互等算法的计算步骤

第一步:选取原结构的任一力法基本结构,将原结构所受荷载全部作用于此静定结构上,即获得状态 T,并求出相应内力。

第二步:在原结构上施加与所求位移相应的广

义单位荷载,获得虚拟状态 S,并求出相应内力。

第三步:利用单位荷载法的计算公式,求出所需位移。

三、算例

如图 3(a)所示刚架,其柱 BA 承受半跨均布荷载 q 的作用,求该柱正中截面 D 的水平位移 Δ_{DH} 。

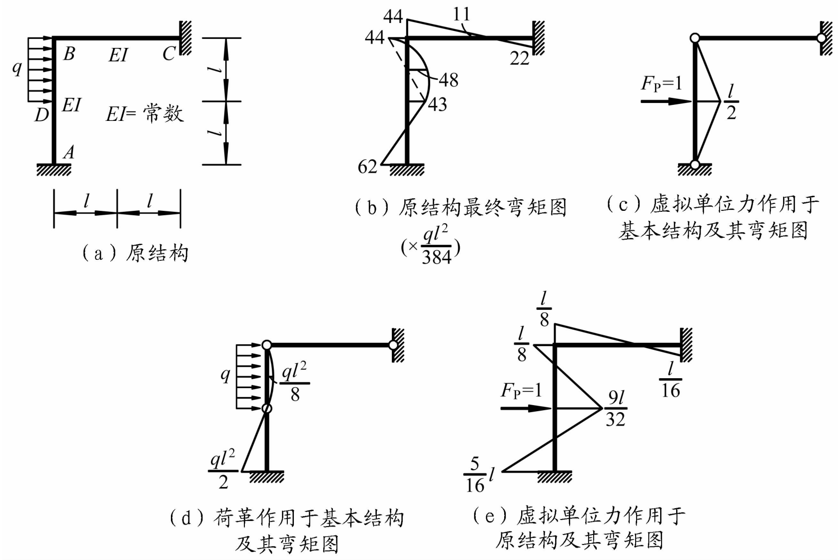

图 3 算例

此例为等截面直杆构成的刚架,可不计轴向变形和剪切变形对位移的贡献。位移计算时,可采用图乘法。下面分别用传统方法和位移互等算法进行比对计算,验证位移互等算法的正确性。

(一)传统方法

第一步:求实际状态内力。

利用超静定结构解法(如力法、位移法等),求出原结构在荷载作用下的最终弯矩图,如图 3(b)所示。

第二步:确定虚拟状态,并求内力。

选取原结构的任一力法基本结构,在其上施加与所求位移相应的单位力 $F_P=1$,并求得弯矩图,如图 3(c)所示。

第三步:利用图乘法计算 Δ_{DH}。

$$\Delta_{DH}=\frac{1}{EI}\Big[\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot l\Big)\Big(\frac{2}{3}\cdot 43-\frac{1}{3}\cdot 44\Big)+\Big(\frac{2}{3}\cdot 48\cdot l\Big)\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot l\Big)\Big(\frac{2}{3}\cdot 43-\frac{1}{3}\cdot 62\Big)\Big]\frac{ql^2}{384}=\frac{27ql^4}{768EI}(\rightarrow)$$

(二)位移互等算法

第一步:确定状态 T。选取原结构的任一力法基本结构,将所有荷载作用于此结构上并作出弯矩图,如图 3(d)所示。

第二步:确定虚拟状态 S。在原结构上施加与所求位移相应的单位力 $F_P=1$,并求得弯矩图,如图 3(e)所示。

第三步:利用图乘法计算 Δ_{DH}。

$$\Delta_{DH}=\frac{1}{EI}\Big[\Big(\frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot l\Big)\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{9l}{32}-\frac{l}{8}\Big)+\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\Big)\Big(\frac{2}{3}\cdot\frac{5l}{16}-\frac{1}{3}\cdot\frac{9l}{32}\Big)\Big]=\frac{27ql^4}{768EI}(\rightarrow)$$

此例中,两种方法的计算结果完全一致,验证了位移互等算法的正确性。

四、位移互等算法的优势

位移互等算法把对超静定结构的内力求解置于虚拟状态中,这使其相对于传统方法具有以下特点。

第一,如果原结构承受复杂荷载作用,采用传统方法,需求解复杂荷载作用下,该超静定结构的内力,这将带来繁重的工作量;而采用位移互等算法,一方面内力求解变成了简单的静定问题,另一方面还可以通过运用力法基本结构的选取技巧,进一步降低复杂荷载带来的内力求解困难。

第二,用于位移求解所设的虚拟单位力状态中,一般仅包含 1 个或 1 对广义单位力,因此即便在此状态中求解原超静定结构,也不会导致工作量的过多增加。

综上,鉴于实际荷载一般比虚加广义单位力要

复杂得多,因而利用位移互等算法,将超静定结构的内力解算转移至虚拟状态中,就可以达到降低计算工作量的目的。

五、结语

利用位移互等定理改进的单位荷载法——位移互等算法,可将传统方法中原结构最终内力的解算,转化为荷载作用下静定的力法基本结构的内力解算,并将超静定内力解算转移至虚拟状态中。在教学中,位移互等算法可作为传统方法的补充,丰富结构力学课堂教学内容。该方法还可有效减低受复杂荷载作用的超静定结构位移计算的工作量,在实际运用中有着明显意义。

参考文献:

[1] 萧允徽,张来仪. 结构力学(Ⅰ)[M]. 1 版. 北京:机械工业出版社,2006.

[2] 李廉锟. 结构力学上册[M]. 1 版. 北京:高等教育出版社,2004:112 - 150.

[3] 龙驭球,包世华. 结构力学教程(Ⅰ)[M]. 1 版. 武汉:高等教育出版社,2000:287 - 375.

An improved displacement calculation method of statically indeterminate structures based on displacement reciprocal theorem

WANG Daquan, WEN Guozhi

(*College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, P. R. China*)

Abstract: The unit-load method is often used to calculate the displacement of statically indeterminate structure in structural mechanics to find the actual displacement state and the virtual unit-load state and combine both states to solve displacement. However, the enormous workload will arise when this method is used to solve the statically indeterminate structures bearing complex loads. A new unit-load method, which was improved by the displacement reciprocal theorem, put the loads acted on the original structure to any one of its force-method primary structures, and combined this state with the virtual state whose unit-load acted on the original structure to solve displacement. Since the primary structure was statically determined, the workload would be efficiently decreased. Thus, the improved method is valuable in practical application of structural mechanics teaching and provides a new option for teachers and students as an addition of the course contents.

Keywords: reciprocal theorem; displacement; unit-load method; statically indeterminate structure

(编辑　梁远华)