

逐段刚化法在材料力学中的应用

蔡路军, 磨季云, 韩 芳

(武汉科技大学 理学院, 湖北 武汉 430065)

摘要:目前材料力学教材中对逐段刚化法讲解不够详细,并且仅应用于求解梁的变形,但逐段刚化法其实是叠加法的一种,为材料力学的一种基本方法,可应用于多种问题的求解,尤其是较为复杂的材料力学问题。文章在分析逐段刚化法原理的基础上,结合教学体会,对其在超静定拉压杆、阶梯轴、变截面梁和平面刚架问题的应用作了阐述。

关键词:材料力学;课程教学;逐段刚化法;叠加法;变形

中图分类号:G642.0

文献标志码:A

文章编号:1005-2909(2013)04-0044-04

在现行材料力学教材中,较少讲解逐段刚化法,只在用叠加法求解外伸梁变形时简单提及。逐段刚化法实质为材料力学常用方法——叠加法的一种特例,但在材料力学教材中,其原理及应用较少阐述,因此,对该问题进行深入研究,对于完善材料力学教学内容十分必要。

一、逐段刚化法的基本原理

构件在受到外力作用下处于平衡状态,假想用 $m-m$ 截面把构件分成 I、II 两部分(如图 1),则构件的变形由这两部分组成,即 $\delta_{sum} = \delta_I + \delta_{II}$, δ 为广义变形。

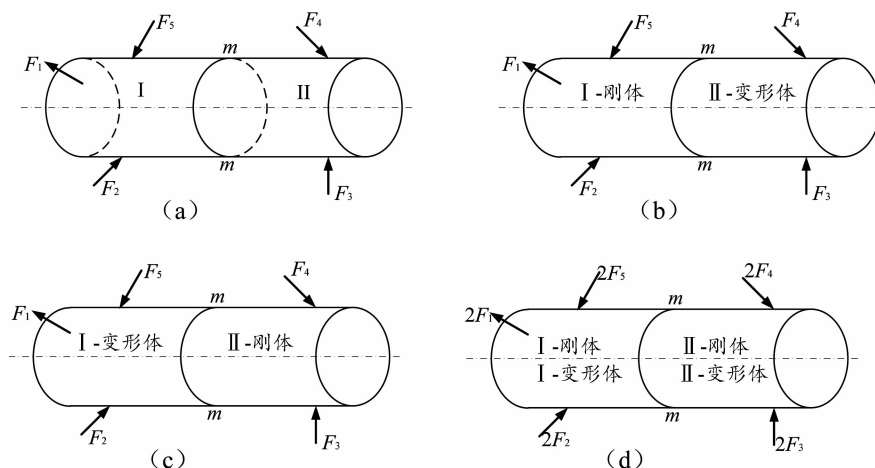


图 1

收稿日期:2012-12-15

作者简介:蔡路军(1975-),男,武汉科技大学理学院副教授,硕士,主要从事工程力学研究,(E-mail) dashingdell@163.com。

将 I、II 段刚化得到图 1(b)、图 1(c) 所示部分。将这两部分叠加,则得到图 1(d) 所示构件。此时,构件相当于两个构件放在一起,载荷加倍。但由于两个构件中有一个为刚体,根据刚化原理:“如果变形体在某一力系作用下处于平衡,若将此变形体刚化为刚体,其平衡状态不变”,将原构件刚化后其平衡状态不变;再根据减平衡力系原理,减去作用在刚体上的一组平衡力,则变形体只受到一组平衡力作用,即得到初始变形体状态,如图 1(a) 所示。通过逐段刚化法后,所求的变形与原始状态一致,从而说明了逐段刚化法具有可行性,其实质是叠加法的一种特例。传统的叠加法是构件不变,载荷叠加;而逐段刚化法,是载荷不变,构件叠加。

在应用逐段刚化法时要注意 4 点:(1) 构件的变形为小变形,须满足虎克定律;(2) 刚化部分的外力对变形体段的作用必须合成到变形段末端;(3) 变形量为广义变形,可以为轴向变形、扭转角或梁弯曲时的转角和挠度;(4) 由刚化所引起的刚体变形需考虑总变形,比如梁变形段末端转角会引起“刚化段”的刚体位移。

二、逐段刚化法应用

逐段刚化法在材料力学中应用广泛,尤其是用来求解材料力学中较为复杂的问题比较简便,下面列举其应用。

(一) 逐段刚化法在轴向拉压中的应用

如图 2 所示超静定杆 AB,在 1/3 处受集中力 P 作用,求 A、B 两端约束反力,杆件抗拉刚度 EA 已知。

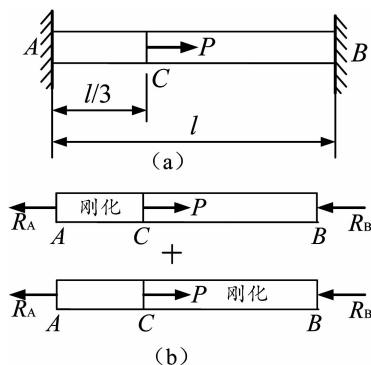


图 2

(1) 解题思路:此题可用变形协调条件补充一个几何学方程,再联立物理学方程和静力学平衡方程,求两端约束力,但此过程较为繁琐,如用逐段刚化法则较为简单。将杆件 AB 分为 AC 段和 CB 段进行刚化,如图 2(b) 所示。AC 段刚化后为刚体,无变形,

CB 段的变形由 R_B 产生;而 CB 段刚化后,CB 为刚体,无变形,AC 段的变形由 R_A 产生。由于杆件两端固定,所以它们的变形总和为零。

$$(2) \text{具体求解: AC 段刚化, BC 段变形: } \Delta l_{BC} = (-R_B) \cdot \frac{2}{3}l / EA, \text{ CB 段刚化, AC 段变形: } \Delta l_{AC} = R_A \cdot \frac{1}{3}l / EA, \Delta l_{AB} = \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC} = R_A \cdot \frac{1}{3}l / EA + (-R_B) \cdot \frac{2}{3}l / EA = 0 \Rightarrow R_A = 2R_B。$$

$$\text{又根据静力学平衡方程: } R_A + R_B = P, \text{ 可得出 } R_A = 2P/3, R_B = P/3。$$

(二) 逐段刚化法在圆轴扭转中的应用

变截面轴受力如图 2(a) 所示,A 端固定。 $M_1 = 1\,500\text{ Nm}$, $M_2 = 1\,000\text{ Nm}$, $d_1 = 70\text{ mm}$, $d_2 = 50\text{ mm}$, 材料的切变模量 $G = 80.4\text{ GPa}$ 。试求轴内最大相对扭转角。

(1) 解题思路:将变截面轴 AC 分为 AB 段和 BC 段进行刚化,如图 3(b) 所示。AB 段刚化后为刚体,无变形,CB 段的扭转角由 M_2 产生;而 BC 段刚化后为刚体,无变形,AB 段的扭转角由 M 产生,从而求出 AB 段、BC 段相对扭转角,也可确定最大相对扭转角。

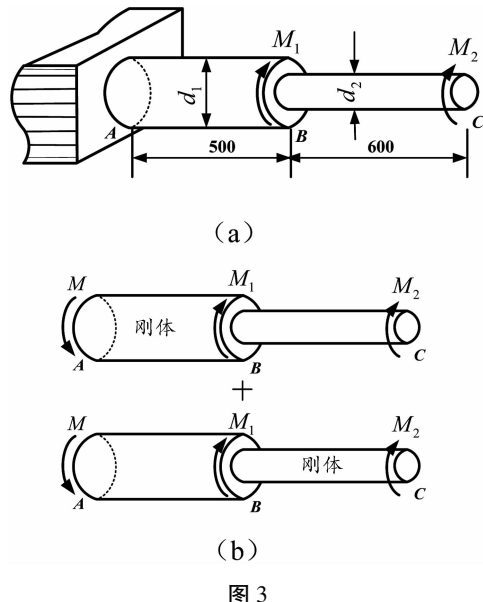


图 3

$$(2) \text{具体求解: AB 段刚化, BC 段扭转角: } \varpi_{BC} = T_2 l_2 / GI_{P2} = 1\,000 \times 600 \times 10^{-3} / 80.4 \times 10^9 \times \frac{3.14}{32} \times 50^4 \times 10^{-12} = 0.012\,2\text{ rad},$$

$$\text{BC 段刚化, AB 段扭转角: } \varpi_{AB} = T_1 l_1 / GI_{P1} =$$

$$2500 \times 500 \times 10^{-3} / \sqrt{80.4 \times 10^9 \times \frac{3.14}{32} \times 70^4 \times 10^{-12}} = 0.0066 \text{ rad.}$$

最大相对扭转角为 AC 段相对扭转角: $\varphi_{\max} = \varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0.0188 \text{ rad.}$

(三) 逐段刚化法在梁变形中的应用

计算图 4(a) 所示阶梯梁的最大挠度, 已知 EI_1, EI_2 为常量。

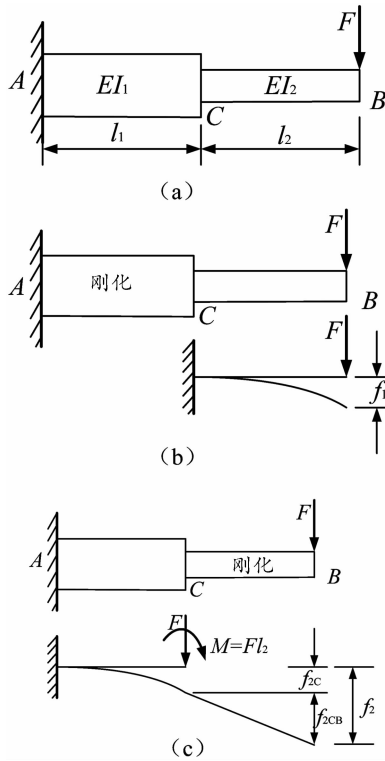


图 4

(1) 解题思路: 由图可知, 最大挠度发生于 B 截

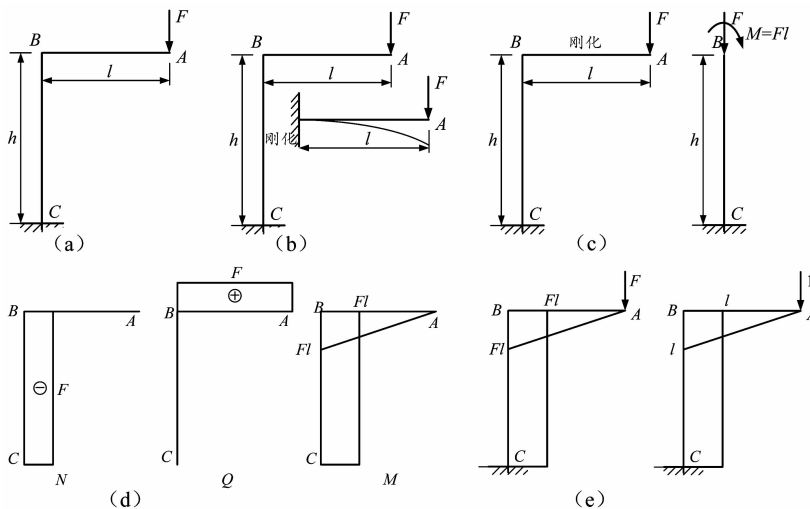


图 5

(2) 具体求解:

CB 段刚化, BA 段为悬臂梁, 其内力图如图 5

面处。将变截面梁分为 AC 段和 CB 段进行刚化, 如图 4(b)、(c) 所示。AC 段刚化后, 则 CB 段相当于 C 截面固定的悬臂梁; 而 CB 段刚化后, CB 为刚体, AC 段为悬臂梁, 根据“静力等效原则”, C 处受到的载荷为 F 和 M, 并且此时 CB 附在 C 截面上, B 截面处的挠度由两部分组成: 一为 C 点的挠度, 二为由转角引起刚化段 CB 的刚性位移。

(2) 具体求解:

在图 4(b) 中 $f_1 = -\frac{Fl_2^3}{3EI_2}$ 。在图 4(c) 中 $f_{2c} = -\frac{Fl_1^3}{3EI_1} - \frac{Fl_2 l_1^2}{2EI_1}$, $f_{2cb} = \theta_2 \cdot l_2 = \left(-\frac{Fl_1^2}{2EI_1} - \frac{Fl_2 l_1}{EI_1}\right) \cdot l_2$ 。故图 4(a) 中梁的自由端 B 的总挠度为 $f_B = f_1 + f_2 = f_1 + f_{2c} + f_{2cb} = -\frac{F}{3E} \left(\frac{l_2^3}{I_2} + \frac{l_1^3}{I_1}\right) - \frac{Fl_1 l_2}{EI_1} (l_1 + l_2)$ 。

(四) 逐段刚化法在刚架中的应用

如图 5(a) 所示刚架, 试画出其内力图。其已知各段抗弯刚度均为 EI, 不计轴力和剪力的影响, 试求 A 截面的垂直位移。

(1) 解题思路: 将刚架分为 CB 段和 BA 段进行刚化, 如图 5(b)、(c) 所示。CB 段刚化后, 则 BA 段相当于 B 截面固定的悬臂梁, 可在 BA 段画出内力图; 而 BA 段刚化后, BA 为刚体, 根据“静力等效原则”, CB 段 B 处受到的载荷为 F 和 M, 则 CB 段的内力图很容易画出。弯矩图得出后, 用图乘法就可求出 A 点垂直位移。

(d) 中 BA 段所示。BA 段刚化, CB 段受载荷为 F 和 M 作用, 其内力图如图 5(d) 中 CB 段所示。计算 A

点垂直位移采用图乘法,如果不计轴向拉压,在 A 点施加单位力,则刚架内力图和单位力图如图 5(e) 所示。

$$EI\Delta_A = \frac{1}{2}Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3}l + Fl \cdot h \cdot l = \frac{1}{3}Fl^3 + Fl^2h,$$

$$\Delta_A = \frac{Fl^2(l+3h)}{3EI}。$$

三、结语

对于材料力学中变截面梁问题和平面刚架等问题,一般叠加法难以求解,因为常用的叠加法都是载荷的叠加,不涉及变截面的问题。而通过上面的讨

论可以看出,应用逐段刚化法求解超静定拉压杆、变截面梁、轴和平面刚架问题,其原理明了,易于理解,计算简单,是一种简单有效的方法。

参考文献:

- [1] 刘鸿文. 材料力学[M]. 5 版. 北京:高等教育出版社,2010.
- [2] 陈兰新. 逐段刚化法在材料力学中的应用[J]. 甘肃广播电视大学学报,1998(3):62-64.
- [3] 洪彩霞. 逐步刚化法的实质[J]. 电力学刊,1991,6(2):41-43.

Application of piecewise rigidization method in mechanics of materials

CAI Lujun, MO Jiyun, HAN Fang

(Science College, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, P. R. China)

Abstract: At present, the piecewise rigidization method in mechanics of materials is not explained in detail, which is only applies to solve the deformation of beam. In fact, it is a kind of superposition method. As a basic method in mechanics of materials, it can be applied to solve a variety of problems, especially complex mechanics problems. Based on the analysis of principle of the piecewise rigidization method, combining with my own teaching experience, the application is discussed in depth on the statically indeterminate tension and compression bar, stepped shaft, non-uniform beam and plane rigid frame.

Keywords: mechanics of materials; course teaching; piecewise rigidization method; superposition method; deformation

(编辑 梁远华)