

结构力学中的条件方程概念^{*}

孙飞飞, 王文涛[△], 刘桂然

(同济大学 建筑工程系, 上海 200092)

[摘要] 国外《结构力学》教材中提出了条件方程的概念并简单阐述了其应用。为此,探讨了条件方程概念的实质,并介绍了其在空间静定结构、位移法和矩阵位移法中的应用,建议在结构力学课程教学中介绍这一概念。

[关键词] 条件方程; 结构力学; 双语教学

[中图分类号] TU3; G642

[文献标识码] A

[文章编号] 1005-2909(2006)02-0070-04

在国内结构力学教材^[1,2]中,不太强调方程的概念。比如在静力学部分提到的主要是平衡方程和变形协调方程,即将弹性力学中的几何方程与物理方程合二为一以变形协调方程的形式出现。这与偏向工程应用并简化数学方法的培养理念有关。

在结构力学双语教学实践中我们发现欧美教材对方程概念较为重视,如条件方程概念的介绍即为一例。但是从方程概念角度出发,英文教材^[3]中条件方程概念的应用范围太窄,仅局限在平面静定结构中,不利于学生真正领会条件方程的概念与内涵。本文将介绍条件方程概念在空间静定结构、位移法和矩阵位移法中的应用,旨在通过实例分析探讨学生学习条件方程概念对学生结构力学能力培养的作用。

一、条件方程概念在平面静定结构中的应用

该英文教材在求解支承反力多于3个,即在介绍外部超静定的平面静定结构时通过几个应用实例(参见图1、图2)引入了条件方程的概念。

图1所示多跨连续梁结构为外部超静定,铰C和D处结构不能承受弯矩,为该结构中存在的特有条件。换言之,弯矩不能通过铰传递,因此有结点C(或者D)左侧(或右侧)荷载和反力对该点的力矩为

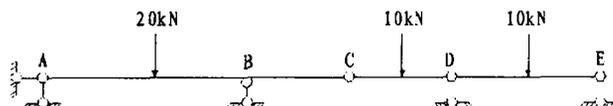


图1

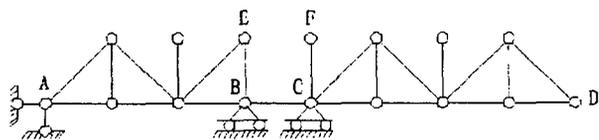


图2

零,这样就得到了所需要的条件方程、联立条件方程组和3个总体平衡方程,可以求出5个未知支承反力。

$$\begin{cases} \sum M_c = 0 \\ \sum M_d = 0 \end{cases} \quad (1)$$

图2所示为外部超静定的桁架结构,观察发现BC、EF两根杆件平行,ABE子结构和CDF子结构之间没有斜杆连接,因而不能传递竖向力,这是该结构所特有的条件。ABE或CDF子结构的荷载与反力

• [收稿日期]2006-03-10

[基金项目]同济大学教学改革项目“结构力学双语教学方法研究”

[作者简介]孙飞飞(1971-),男,江苏南通人,同济大学副教授,从事多高层钢、钢-混凝土混合结构研究。

沿竖向投影和力为零,这就是所需要的条件方程。

$$\sum Y = 0 \quad (2)$$

该英文教材仅举例说明了条件方程的概念,并没有对其进行深入分析和说明。为了更好地把握这一概念,下面将对条件方程的实质和其在平面静定结构之外的应用进行探讨。

二、条件方程概念的实质

与其他力学问题一样,结构力学问题的求解需要建立一组方程,包括平衡方程、几何方程、物理方程。条件方程并不是这组方程之外的新方程,它只是这些方程中的一些特殊方程的集合。条件方程的实质是寻找和利用已有条件建立方程(条件方程),并以“先处理”的方式来简化问题的求解。如何“寻找并利用已有条件”和“简化问题”是条件方程的两个关键。

上述平面问题中,在列出条件方程时,采用了拆分整体结构并对子结构列平衡方程的方法。条件方程有多种表现形式。平衡结构各组成部分之间以及结构总体与基础之间都必须以适当的方式连接起来,对应于各种连接方式都可以列出反映其特性的方程,以下为平面问题中常常利用的一些已有条件:

1. 铰结不能传递弯矩,有 $M = 0$;
2. 滚轴支座只能传递竖向力,有 $M = 0, X = 0$;
3. 二力杆相当于滚轴支座,同样有 $M = 0, X = 0$;

0;

4. 定向支座可以提供反力矩 M 和竖向反力 Y ,但不能阻止水平方向的滑动,有 $X = 0$;

5. 在桁架结构中,两根平行链杆与定向支座相似,能够传递弯矩和水平方向的力,但不能阻止竖向位移有 $Y = 0$ 。

由于已有条件的多样性,造成条件方程的多样性,因而具体的求解技巧性比较强。例如求解平面桁架结构时的截面法,对截面的选取技巧性要求非常高。但是反过来,如果了解了条件方程的概念,采用条件方程的概念将不同形式的条件统一起来,可以达到强化方程概念的目标,从而降低对技巧的要求。但是应该注意到,并不是以上列出的所有条件

都应该写出条件方程并联立求解,那样与结点法无异,方程的数目会非常多,不能达到简化问题的目的。下面将通过条件方程在空间静定结构中的应用实例探讨如何选用条件方程。

三、条件方程概念在空间静定结构中的应用

该英文教材中条件方程概念的应用局限在平面静定结构中,事实上,条件方程的概念也可以应用到空间静定结构中,而且由于空间问题的复杂性,更能体现条件方程概念的重要性。

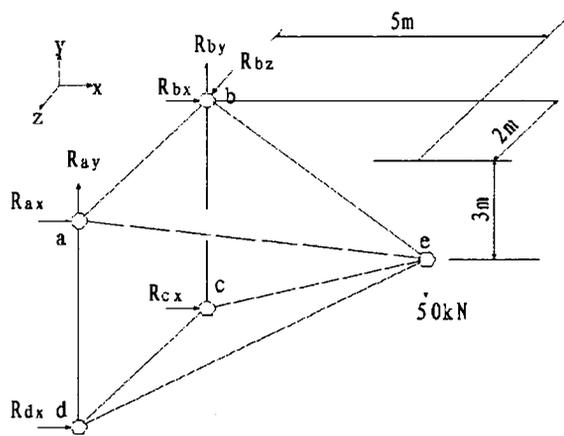


图 3

对图 3 中的结构进行组成分析知道,该空间结构属于外部超静定,但结构整体是静定的。

教材给出了如下的解答:

建立 6 个整体平衡方程,如下:

$$\begin{cases} \sum M_{zd} = (50 \times 2) - (R_{by} \times 5) = 0; \\ \sum P_y = R_{by} = 0; \\ \sum P_z = R_{ay} + R_{by} - 50 = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sum M_{zd} = -(R_{ax} \times 5) - (R_{bx} \times 5) - (50 \times 5) = 0; \\ \sum M_{yd} = -(R_{bx} \times 5) - (R_{ax} \times 5) = 0; \\ \sum P_x = R_{ax} + R_{bx} + R_{cx} + R_{dx} = 0; \end{cases} \quad (4)$$

考虑到外部一次超静定,首先通过方程组(4)选取其中一个未知反力 R_{ax} 表示所有的未知力,然后分

别对结点 a 和 b 采用结点法求解轴力 $z_{ab} = -Z_{ba} = 0.6R_x$, $Z_{ba} = -Z_{ab} = -(20 + 0.4R_x)$, 由二力杆 ab 的平衡方程 $Z_{ab} - Z_{ba} = 0$, 可以求解出 R_x , 最后通过结点法可以解出所有的未知力。

以上的求解过程给人的总体感觉是技巧性偏强, 方法性不足。在求解的过程中找到 R_x 的求解思路比较曲折, 且没有有效的办法考虑所得到的条件是否与已有方程独立。

根据条件方程的概念, 下面给出的求解方法, 目的会更加明确: 即首先寻找和利用已有条件建立条件方程, 然后对问题进行“先处理”, 简化问题的求解。在寻找条件方程时, 从简化问题的层面上考虑, 希望条件方程满足以下两个条件:

1. 尽量不要引入新的(已有方程中没有出现过的)未知量;
2. 与已有方程独立, 即所建立的条件方程不能通过已有方程之间的线性运算获得。

结构已有条件有多个, 如 a、b、c、d、e 结点处弯矩为零等。考虑到条件方程的两个限制条件, 选择利用 e 点已有条件建立条件方程。取过 e 点的平行于 xy 的平面截取结构前半部分进行分析, 注意到 ab 和 cd 两杆是平行的, 且他们的内力是新增加的变量, 为了消除它们的影响, 在 e 点对 Z 坐标轴取矩, 有:

$$M_x = 0, \text{ 即 } (5R_{cy} + 3R_{ax} - 2R_{dx} = 0) \quad (5)$$

该方程独立于已有的整体平衡方程, 并且没有引入新的变量, 这就是我们寻找的一个条件方程, 然后联立条件方程和 6 个整体平衡方程求解出所有的支座反力。

通过比较, 可以看出条件方程概念对解题思路的指导作用。前一种解法是一种试探性的做法, 后一种解法有一个总的指导思想, 求解过程的每一步都目的明确。

和一般的结点法比较而言, 原来的问题是解一个方程组(包含 15 个方程); 现在问题的求解分成了如下两步: 第一步求解一个包含 7 个方程的方程组, 第二步依次对各结点采用结点法求解杆件内力, 问题显然得到了简化。

四、条件方程概念在位移法中的应用

位移法以结构的结点位移(支座处位移除外)为基本未知量建立平衡方程组求解。中文教材在建立杆端弯矩方程时, 对于远端为铰支或者滑动支座的情况分别利用其杆端弯矩或者杆端剪力为零的条件建立方程, 代入自由式杆件的物理方程, 从而得到针对这两种支座条件情况的物理方程, 此时所对应的杆端转角或杆端横向线位移已经不再是独立的位移, 因而不再是基本未知量。而在大多数国外的《结构力学》教材中并没有引入条件方程, 而是采用统一的自由式杆件的物理方程。这两种情况的区别如果不从条件方程的概念来看则很难解释清楚, 学生也就只能生搬硬套, 当作是一种特殊的技巧来理解。

如图 4 所示结构, 对远端支座条件, 如果不进行先处理, 结构的求解有 3 个基本未知量。进行处理后, 如图 4 所示编号, 只有 1 个基本未知量, 问题的求解显然要简单得多。

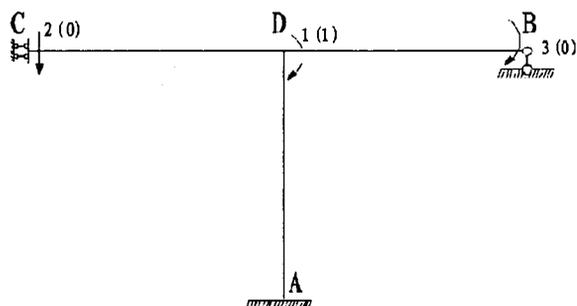


图 4

五、条件方程概念在矩阵位移法中的应用

结构矩阵位移法中, 在进行整体分析时有“先处理”和“后处理”两种做法。“先处理”即在形成整体刚度矩阵时事先根据支承条件对刚度矩阵进行处理。“先处理”的思想实质上就是通过引入支座处位移为零的条件方程来减小方程组的规模, 即总刚度矩阵的维数。同样采用上图所示的例子, 如果采用后处理, 如图 5 所示编号, 结构的求解有 12 个基本未知量, 那么整体刚度矩阵是一个 12 维的矩阵。而采用先处理法后, 结构的求解要简单得多, 只有 3 个基本未知量。

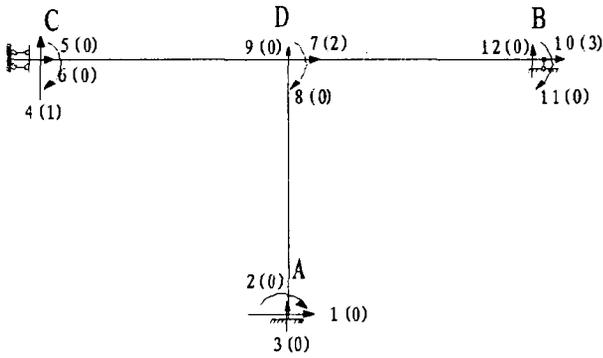


图 5

六、结语

我们从该英文教材中条件方程出发,探讨了条件方程概念的实质,并对其进行了推广应用。实际上,动力学中的静力凝聚方法以及子结构方法中的

方程降阶都是条件方程概念应用的实例,而且动力学中的约束方程的概念和条件方程的概念基本相似。可见,条件方程概念对结构力学而言是非常重要的。在结构力学教学中明确提出这一概念,一方面可以提高学生寻找条件建立方程的能力(如上面空间静定结构的示例),另一方面通过条件方程可以将上文中所提到的一系列相关方法和技巧在方程的概念上统一起来,便于加深理解和灵活应用。因此,在结构力学课程教学中引入这一概念是非常重要的。

【参考文献】

- [1] 朱慈勉. 结构力学(上,下)[M]. 北京:高等教育出版社,2004.
- [2] 龙驭球,包世华. 结构力学教程(I,II)[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- [3] H. H. West. Fundamentals of Structural Analsis[M]. John Wiley&sons, Inc. 2002.

Concept of condition equation in Structural Mechanics

SUN Fei - fei, WANG Wen - tao, LIU Gui - ran

(Department of Structural Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The concept of condition equation is introduced in oversea textbooks of Structural Mechanics, with some simple applications. In this paper, the essence of this concept is discussed, followed by some examples of its application in statically determinate spatial structures, displacement method and matrix displacement method. It is recommended to introduce this concept course of Structural Mechanics.

Key words: condition equation; Structural Mechanics; bilingual instruction