高等建筑教育 2013 年第 22 卷第 5 期
http://qks.cqu.edu.cn JOURNAL OF ARCHITECTURAL EDUCATION IN INSTITUTIONS OF HIGHER LEARNING Vol. 22 No. 5 2013
doi:10.11835/j.issn.1005 - 2909.2013.05.016

弹性力学本科教学中的矩阵表达形式

刘章军,镇 斌
(三峡大学 水利与环境学院工程力学系,湖北 宜昌 443002)

摘要:在弹性力学的本科教学中,采用了矩阵形式来表达各物理量间的相互关系。文中主要讨论了以应力、应变、位移为基本量的各物理量间的矩阵表达形式,包括基本方程、边界条件以及不同坐标间的基本物理量的转换关系。采用矩阵表达形式不仅书写简洁、记忆容易,而且表现直观、便于理解。

关键词:弹性力学;本科教学;矩阵表达形式
中图分类号:G642;TB125 **文献标志码**:A **文章编号**:1005-2909(2013)05-0066-05

在现行的弹性力学本科教材[1]中,各物理量间的相互关系主要采用展开形式的教学方式,这种展开的表达形式书写较为复杂且记忆困难,各物理量间的关系不能直观表现。虽然采用张量的指标记法可以达到书写简洁的目的[2],但对于初学者理解较为困难。为此,在弹性力学的本科教学中,采用矩阵表达是一种较为合适的形式。采用矩阵表达形式具有书写简洁、记忆容易,同时也便于与数值解法(如有限单元法)相衔接。

为检验矩阵表达形式在弹性力学本科教学中的效果,笔者曾在 2 年 4 个学期的教学中进行了矩阵表达形式与展开形式的对比实践,学生普遍认为矩阵表达形式简洁易懂、便于记忆。对于普通大学本科生而言,矩阵表达是一种较为理想的教学形式。为此,文章简要介绍在弹性力学本科教学中采用的矩阵形式表达。

一、弹性力学问题中物理量间的相互关系

在大学本科教材中,一般采用弹性力学问题的微分提法[3],即从研究弹性体内的微元入手,导出描述微元静力平衡、变形几何及物理关系的一组基本方程,加上相应的边界条件,把弹性力学问题归结为求解偏微分方程组的边值问题。图 1 给出了弹性力学中各物理量间的相互关系,包括基本方程和边界条件。

二、以应力为基础的物理量间的矩阵表达

在直角坐标系 x,y,z 下,应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$,体力分量 f_x,f_y,f_z,面力分量 $\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z$,全应力在坐标轴上的投影 p_x,p_y,p_z,外法线的方向余弦 l,m,n;在柱坐标 ρ,φ,z 下,应力分量 $\sigma_\rho,\sigma_\varphi,\sigma_z,\tau_{\rho\varphi},\tau_{\rho z},\tau_{\varphi z}$,体力分量 f_ρ,f_φ,f_z。为简便之,记:

收稿日期:2013 - 05 - 13
基金项目:2012 年湖北省高等学校省级教学研究项目(2012237);三峡大学弹性力学精品课程建设项目
作者简介:刘章军(1973 -),男,三峡大学水利与环境学院工程力学系教授,博士,主要从事工程力学研究,(E - mail)liuzhangjun73@ aliyun. com。

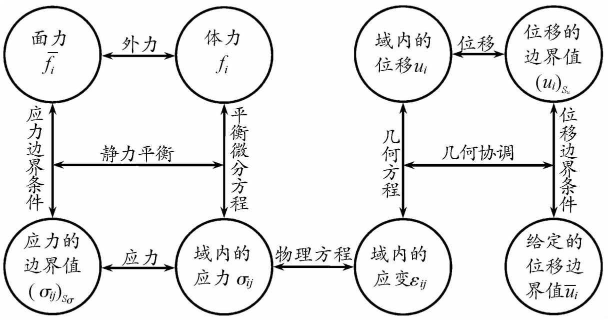

图1　物理量间的相互关系

$$[\sigma]^{(1)}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix},\ \{f\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}f_x\\ f_y\\ f_z\end{Bmatrix},$$

$$\{\nabla\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix},\ \{\bar{f}\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}\bar{f}_x\\ \bar{f}_y\\ \bar{f}_z\end{Bmatrix},$$

$$\{p\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}p_x\\ p_y\\ p_z\end{Bmatrix},\ \{l\}^{(1)}=\begin{Bmatrix}l\\ m\\ n\end{Bmatrix},$$

$$[\sigma]^{(2)}=\begin{pmatrix}\sigma_\rho & \tau_{\rho\varphi} & \tau_{\rho z}\\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z}\\ \vdots & & \\ \tau_{\rho z} & \tau_{\varphi z} & \sigma_z\end{pmatrix},\ \{f\}^{(2)}=\begin{Bmatrix}f_\rho\\ f_\varphi\\ f_z\end{Bmatrix},$$

$$\{\nabla\}^{(2)}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix},\ \{e\}^{(2)}=\frac{1}{\rho}\begin{Bmatrix}\sigma_\rho-\sigma_\varphi\\ 2\tau_{\rho\varphi}\\ \tau_{\rho z}\end{Bmatrix}$$

下面,给出以应力为基础的各物理量间的矩阵表达形式。

(一)平衡微分方程的矩阵表达

在直角坐标系中,平衡微分方程的矩阵表达形式为:

$$[\sigma]^{(1)}\{\nabla\}^{(1)}+\{f\}^{(1)}=\{0\}\tag{1}$$

这里,记号约定:$\sigma_x\times\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}$,$\tau_{xy}\times\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}$,$\tau_{xz}\times\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}$,依此类推。式(1)表明了应力状态随坐标的变化规律,即应力对坐标的一阶导数与体力所满足的平衡关系式。类似地,在柱坐标系中的平衡微分方程可写为:

$$[\sigma]^{(2)}\{\nabla\}^{(2)}+\{f\}^{(2)}+\{e\}^{(2)}=\{0\}\tag{2}$$

这里,记号约定:$\sigma_\rho\times\dfrac{\partial}{\partial\rho}=\dfrac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}$,$\tau_{\rho\varphi}\times\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}$,$\tau_{\rho z}\times\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}$,依此类推。在式(2)中,增加的 $\{e\}^{(2)}$ 项是由于柱坐标系中 φ 的正面和负面不平行,以及 ρ 的正面和负面面积不等所引起的。

对于弹性力学平面问题,只需在式(1)和式(2)中分别去掉与 z 相关的所有元素,即可得到平面问题的直角坐标和极坐标中的平衡微分方程。

对于空间轴对称问题,由于对称性,有 $\tau_{\rho\varphi}=\tau_{\varphi z}=0$,其他4个应力分量 $\sigma_\rho,\sigma_\varphi,\sigma_z,\tau_{\rho z}$ 一般都是 ρ 和 z 的函数。因此,将式(2)中矩阵 $[\sigma]^{(2)}$ 的第二行和第二列去掉,同时将所有列向量的第二行去掉,得到空间轴对称问题的平衡微分方程:

$$\begin{pmatrix}\sigma_\rho & \tau_{\rho z}\\ \tau_{\rho z} & \sigma_z\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}+\frac{1}{\rho}\begin{Bmatrix}\sigma_\rho-\sigma_\varphi\\ \tau_{\rho z}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}f_\rho\\ f_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\tag{3}$$

(二)斜截面应力的矩阵表达

已知某点的应力张量或应力矩阵 $[\sigma]$ 后,此点的应力状态就被确定了。于是,过此点任意斜截面上的全应力在笛卡尔坐标轴上的投影可写为:

$$\{p\}^{(1)}=[\sigma]^{(1)}\{l\}^{(1)}\tag{4}$$

若将斜截面看作物体的边界面,且给定面力 $\{\bar{f}\}^{(1)}$,即可得到应力边界条件:

$$\{\bar{f}\}^{(1)}=[\sigma]^{(1)}\{l\}^{(1)}\tag{5}$$

同时,斜截面上的正应力的矩阵表达式为:

$$\sigma_n=\{l\}^{(1)T}\{p\}^{(1)}=\{l\}^{(1)T}[\sigma]^{(1)}\{l\}^{(1)}\tag{6}$$

(三)主应力和主方向的矩阵表达

由于应力张量或矩阵 $[\sigma]$ 是一个实对称的 3×3 阶方阵,因此,它的三个特征值都是实数,同时存在三个相互正交的特征向量。事实上,对于给定的应力张量或矩阵 $[\sigma]$,此点的主应力和主方向即为应力矩阵 $[\sigma]$ 的特征值和特征向量:

$$[\sigma]^{(1)}\{l\}^{(1)}=\sigma\{l\}^{(1)}\tag{7}$$

主应力是计算最大正应力和最大剪应力的基础,在工程强度校核中起到重要作用。

(四)应力分量转换公式的矩阵表达

设 x,y,z 为原坐标系,x',y',z' 为新坐标系,若令 $l_{ij}=\cos(x'_i,x_j)$,即 x'_i 轴与 x_j 轴夹角的余弦,对于同一点在不同坐标系下的应力分量转换公式的矩阵表达式为:

$$[\sigma']=[\beta][\sigma]^{(1)}[\beta]^T\tag{8}$$

其中,新坐标系的应力矩阵 $[\sigma']$ 和转换矩阵 $[\beta]$ 分别为:

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix},$$

$$[\beta] = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

特别地,对于直角坐标与柱坐标中的应力转换公式为:

$$[\sigma]^{(2)} = [\beta][\sigma]^{(1)}[\beta]^T \tag{9}$$

其中,转换矩阵变为:

$$[\beta] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对于平面问题,直角坐标与极坐标中的应力分量转换关系则为:

$$\begin{pmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\varphi} \\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^T \tag{10}$$

三、以应变和位移为基础的物理量间的矩阵表达

在直角坐标系 x,y,z 下,应变分量 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$,位移分量 u,v,w,给定的位移边界分量 $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$;在柱坐标 ρ,φ,z 下,应变分量 $\varepsilon_\rho,\varepsilon_\varphi,\varepsilon_z,\gamma_{\rho\varphi},\gamma_{\rho z},\gamma_{\varphi z}$,位移分量 u_ρ,u_φ,u_z。为简便之,记:

$$[\varepsilon]^{(1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

$$\{u\}^{(1)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \{\bar{u}\}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix},$$

$$[\varepsilon]^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & \varepsilon_{\rho\varphi} & \varepsilon_{\rho z} \\ \varepsilon_{\rho\varphi} & \varepsilon_\varphi & \varepsilon_{\varphi z} \\ \varepsilon_{\rho z} & \varepsilon_{\varphi z} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & \frac{\gamma_{\rho\varphi}}{2} & \frac{\gamma_{\rho z}}{2} \\ \frac{\gamma_{\rho\varphi}}{2} & \varepsilon_\varphi & \frac{\gamma_{\varphi z}}{2} \\ \frac{\gamma_{\rho z}}{2} & \frac{\gamma_{\varphi z}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

$$\{u\}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix}, \quad [\delta]^{(2)} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} 0 & -u_\varphi & 0 \\ -u_\varphi & u_\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(一)几何方程的矩阵表达

在直角坐标中,几何方程的矩阵表达形式为:

$$[\varepsilon]^{(1)} = \frac{1}{2}(\{u\}^{(1)}\{\nabla\}^{(1)\mathrm{T}} + \{\nabla\}^{(1)}\{u\}^{(1)\mathrm{T}}) \tag{11}$$

这里,记号约定:$u \times \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \times u = \frac{\partial u}{\partial x}$,$u \times \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \times u = \frac{\partial u}{\partial y}$,$u \times \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \times u = \frac{\partial u}{\partial z}$,依此类推。

在柱坐标中,几何方程的矩阵表达则为:

$$[\varepsilon]^{(2)} = \frac{1}{2}(\{u\}^{(2)}\{\nabla\}^{(2)T} + \{\nabla\}^{(2)}\{u\}^{(2)T}) + [\delta]^{(2)} \tag{12}$$

其中,矩阵 $[\delta]^{(2)}$ 为增加部分。同样地,记号约定:$u_\rho \times \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \times u_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}$,$u_\rho \times \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \times u_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}$,$u_\rho \times \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \times u_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial z}$,依此类推。

显然,在式(12)中去掉所有与 z 坐标相关的元素,即可得到平面极坐标中的几何方程:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & \frac{\gamma_{\rho\varphi}}{2} \\ \frac{\gamma_{\rho\varphi}}{2} & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{Bmatrix}(u_\rho \quad u_\varphi)\right] + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_\varphi}{\rho} \\ -\frac{u_\varphi}{\rho} & \frac{u_\rho}{\rho} \end{pmatrix} \tag{13}$$

(二)主应变和主方向的矩阵表达

应变矩阵 $[\varepsilon]$ 与应力矩阵 $[\sigma]$ 一样都是 3×3 阶的实对称方阵,它们具有完全类似的性质。与主应力和应力主向的矩阵表达类似,主应变和应变主向的矩阵表达可写为:

$$[\varepsilon]^{(1)}\{l\}^{(1)} = \varepsilon\{l\}^{(1)} \tag{14}$$

对于理想弹性体,应力主向与应变主向重合,因此可统称为主方向。

(三)位移边界条件的矩阵表达

在直角坐标中,位移边界条件的矩阵表达式为:

$$\{u\}_{S_u}^{(1)} = \{\bar{u}\}^{(1)} \tag{15}$$

(四)位移、应变转换关系的矩阵表达

直角坐标和柱坐标中的位移分量转换关系:

$$\begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{16}$$

特别地,平面直角坐标与极坐标的位移分量转换公式为:

$$\begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{17}$$

把 u_ρ,u_φ 和 u,v 分别替换成 f_ρ,f_φ 和 f_x,f_y,即为

体力分量的转换关系。

与应力转换公式类似,平面直角坐标与极坐标的应变分量转换公式为:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\rho & \varepsilon_{\rho\varphi} \\ \varepsilon_{\rho\varphi} & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^T \quad (18)$$

四、物理方程的矩阵表达

在物理方程的矩阵表达中,一般将应力分量和应变分量写成列向量的形式,即 $\{\sigma\} = (\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yz})^T$,$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{xz}\ \gamma_{yz})^T$。下面,仅以各向同性线弹性材料为例给出物理方程的矩阵表达形式:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\} \quad (19)$$

其中,矩阵 $[D]$ 称为弹性柔度矩阵:

$$[D] = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于柱坐标系和直角坐标系一样都为正交坐标系,对于各向同性弹性体,柱坐标系中的物理方程与直角坐标系中的物理方程具有同样的形式(弹性柔度矩阵 $[D]$ 完全相同),只需将应力分量和应变分量中的下角码 x 和 y 分别换成 ρ 和 φ 即可。

对于平面应力情况,仅需在式(19)中考虑 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$,即可退化为平面应力问题的物理方程:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

在平面应力情况下,应变分量 $\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$,而应变分量 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$。对于平面应变情况($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$),则需将式(20)中的弹性模量 E 换成 $E/(1-\mu^2)$,泊松比 μ 换成 $\mu/(1-\mu)$,同时应力分量 $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$,$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$。

五、结语

在弹性力学的本科教学中,采用矩阵形式表达各物理量间的相互关系,既书写简洁,容易记忆,又可将已学的线性代数知识运用于弹性力学教学中,并为后续的有限单元法教学打下伏笔。教学实践表明,在弹性力学本科教学中采用矩阵形式表达可以获得良好的教学效果,对于普通院校的本科生而言,矩阵表达是一种较为合适的教学形式。

参考文献:

[1]徐芝纶. 弹性力学简明教程[M].3 版. 北京:高等教育出版社,2002.

[2]美陈惠发,A. F. 萨里普. 弹性与塑性力学[M]. 余天庆,王勋文,刘再华,译. 北京:中国建筑工业出版社,2003.

[3] 陆明万,罗学富. 弹性理论基础[M]. 北京:清华大学出版社,施普林格出版社,2001.

Matrix representation of elasticity in undergraduate teaching

LIU Zhangjun, ZHEN Bin

(*College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Hubei 443002, P. R. China*)

Abstract: In undergraduate teaching of elasticity, matrix representations of basic quantities and equations were used. We gave matrix representations of relationships between basic physical quantities, such as stress, strain and displacement, including basic equations, boundary conditions, and coordinate transformations of basic physical quantities. Matrix representations are simply written, easy to be memorized, and easy to be understood.

Keywords: elasticity; undergraduate teaching; matrix representation

(编辑　梁远华)